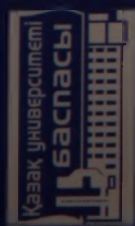


М. Орынбасаров
Ш. Сахаев

ИНТЕГРАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР КУРСЫ

Оқу құралы



Алматы 2014

ӘЛ-ФАРАБИ атындағы ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

М. Орынбасаров
Ш. Сахаев

ИНТЕГРАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР КУРСЫ

Оқу құралы

Алматы
“Қазақ университеті”
2014

ӘОЖ 517
КБЖ 22.161.6
О 74

*Баспаға әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті
механика-математика факультетінің Ғылыми кеңесі және
Редакциялық-баспа кеңесі шешімімен ұсынылған*

Пікір жазғандар:
физика-математика ғылымдарының
докторы, профессор, ҚР ҰҒА академигі **Н. Блиев**
физика-математика ғылымдарының докторы, профессор **М. Жиеналиев**

Орынбасаров М., Сахаев Ш.

О 74 Интегралдық теңдеулер курсы: оқу құралы. – Алматы: Қазақ университеті, 2014. – 208 бет.

ISBN 978-601-04-0432-8

Оқу құралының мазмұны авторлардың көп жылдар бойы әл-Фараби атындағы ҚазҰУ, Абай атындағы ҚазҰПУ және Қ.Сәтбаев атындағы ҚазҰТУ жоғары оқу орындарында оқыған дәрістеріне негізделген. Онда функционалдық анализ: қысып бейнелеу, интегралдық түрлендіру, т.б. тәсілдер мысалдармен көрсетіліп, студенттердің өздері шешетін мысалдар қарастырылған.

Оқу құралы университет студенттеріне, математиктерге, сондай-ақ математиканы пайдаланатын және қолданатын мамандарға (физиктерге, инженерлерге, т.б.) арналған.

**ӘОЖ 517
КБЖ 22.161.6**

ISBN 978-601-04-0432-8

© Орынбасаров М., Сахаев Ш., 2014
© Әл-Фараби атындағы ҚазҰУ, 2014

АЛҒЫ СӨЗ

XIX ғасырдың басында интегралдық теңдеулерге байланысты ғылыми жұмыстар бірен-саран кездессе, ал XX ғасырдың аяғында көптеген ғалымдардың (Абель, Фурье, Фредгольм, Вольтерра және т.б.) терең мазмұнды еңбектерінің арқасында интегралдық теңдеулер математиканың үлкен бір саласы болып қалыптасты. Көптеген есептердің шешулері әртүрлі интегралдық теңдеулер мен интегралдық теңдеулер жүйесіне келтірілді.

Қазіргі уақытта интегралдық теңдеулер саласы көптеген тараулардан тұратын өзіндік ерекше зерттеу тәсілдерімен танылған, қолданбалы есептерде жиі пайдаланатын математиканың негізгі салаларының бірі ретінде қалыптасқан. Сондықтан интегралдық теңдеулер жоғары математиканың негізгі бөліктерінің бірі ретінде университеттер мен жоғары оқу орындарының физика-математика факультеттерінде және жоғары математиканы тереңдетіп оқытылатын университеттерде қолданады.

Ұсынылып отырған оқу құралы авторлардың 1994 жылы “Білім” баспасынан жарық көрген “Интегралдық теңдеулер” атты және 2000 жылы “Қазақ университеті” баспасынан шыққан “Сызықтық интегралдық теңдеулердің есептер жинағы” оқу құралдары негізінде, оларды өңдеп және инновациялық дәріс өткізу үдерісіне бағыттап жазылды. Оқу құралының бұл басылымына өзімнің шәкіртім – физика-математика ғылымдарының кандидаты Серік Айтжанов білікті маман ретінде: кейбір жерлерін өңдеп, көмек бергені үшін авторлар атынан ризашылығымызды білдіремін.

Профессор *Ш. Сахаев*

1. НЕГІЗГІ ҰҒЫМДАР МЕН ИНТЕГРАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРГЕ КЕЛТІРІЛЕТІН ЕСЕПТЕР

§1.1. Интегралдық теңдеулерді кластарға бөлу

Белгісіз функциялар интегралдардың астында кездесетін теңдеулер интегралдық теңдеулер деп аталады. Егер белгісіз функция интегралдық теңдеуге сызықтық түрде қатынасса, онда теңдеуді сызықтық деп атайды.

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds + f(x), \quad a \leq x \leq b \quad (1)$$

түріндегі теңдеу Фредгольмнің 2-текті сызықтық интегралдық теңдеуі деп аталады. Мұндағы, $\varphi(x)$ – нақты айнымалы x аргументіне тәуелді белгісіз функция, $f(x)$ функциясы $[a,s]$ кесіндісінде, $K(x,s)$ функциясы $D = \{a \leq x, s \leq b\}$ жиынында аныкталған белгілі функциялар: $f(x)$ пен $K(x,s)$ сәйкес интегралдық теңдеудің бос мүшесі мен ядросы деп аталады, ал λ – параметр. Интегралдың жоғарғы және төменгі шектері (a мен b) жалпы жағдайда тұрақты шамалар; олар шектелген де, шектелмеген де болуы мүмкін. Егер $f(x) \equiv 0$ болса, онда жоғарыдағы (1) интегралдық теңдеу біртекті, ал $f(x) \neq 0$ болған жағдайда – біртекті емес деп аталады.

Фредгольмнің I-текті интегралдық теңдеуінде белгісіз функция интегралдық мүшеде ғана қатысады, дәлірек айтқанда, ол теңдеу

$$\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds = f(x)$$

түрінде жазылады.

Вольтерраның 2-текті интегралдық теңдеуі деп

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x,s)\varphi(s)ds + f(x) \quad (2)$$

түріндегі, ал I-текті интегралдық теңдеуі деп

$$\int_a^x K(x,s)\varphi(s)ds = f(x)$$

түріндегі теңдеуді айтады.

Егер $\varphi(x)$ функциясын интегралдық теңдеуге қойғанда теңдеу тепе-теңдікке айналса, онда $\varphi(x)$ функциясы интегралдық теңдеудің шешімі деп аталады. Инте-

гралдық теңдеудің шешімі бар және оның жалғыз болуы λ параметріне байланысты екенін алдағы бөлімдерде көрсетеміз. Мәселен, Фредгольмнің біртекті интегралдық

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds$$

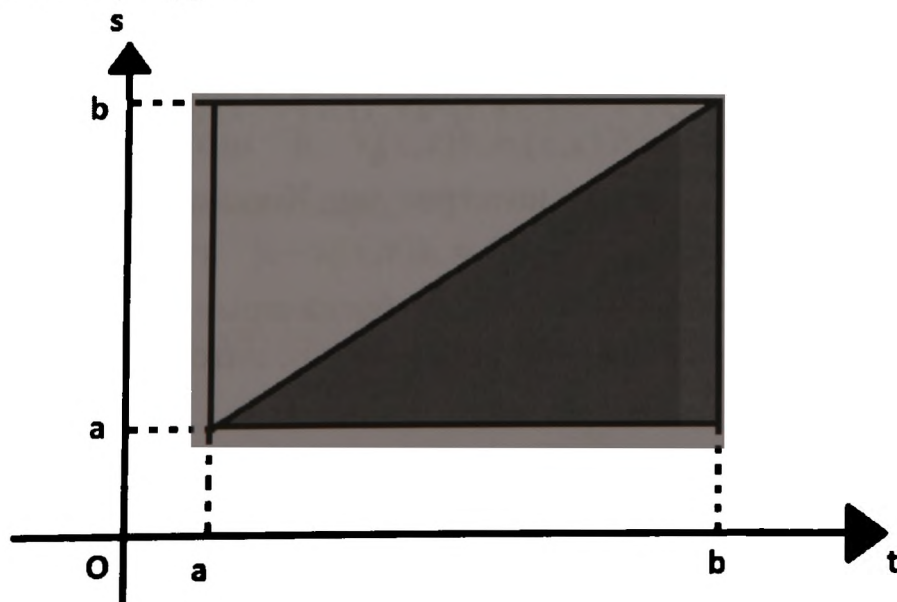
теңдеуінің λ параметрінің кез келген мәндерінде $\varphi(x) = 0$ шешімі бар болады, ал нөлден ерекше шешімдер әрқашан бар бола бермейді.

Фредгольмнің біртекті интегралдық теңдеуінің нөлге тең емес шешімдері бар болатын λ параметрінің мәндері меншікті мәндер деп, ал оларға сәйкес нөлден ерекше шешімдер меншікті функциялар деп аталады.

• **Ескерту.** Вольтерра теңдеуін Фредгольм теңдеуінің дербес түрі деп қарауға болады. Себебі (2) теңдеуінің $K(x,s)$ ядросы $a \leq x \leq b, a \leq s \leq x$ облысында анықталған, ал $a \leq x, s \leq b$ жағдайында $K(x,s) = 0$ деп алсақ, онда біз (1) теңдеуінің ядросын

$$K_0(x,s) = \begin{cases} K(x,s), & x \geq s, \\ 0, & x \leq s \end{cases}$$

түрінде анықтаймыз (1-сурет).



1-сурет

Бұл ескерту бойынша Фредгольм теңдеуі үшін дәлелденген қасиеттер Вольтерра теңдеуі үшін де орындалады. Бірақ Вольтерра теңдеуінің тек өзіне тән ерекше қасиеттері бар, сондықтан Фредгольм теңдеуімен қатар Вольтерра теңдеуін де қарастырамыз.

Алдағы уақытта (1) және (2) интегралдық теңдеулердегі берілген бос мүше $f(x)$ пен ядро $K(x,s)$ үзіліссіз немесе квадраттарымен интегралданатын функциялар:

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < +\infty, \quad \int_a^b \int_a^b |K(x,s)|^2 dx ds < +\infty,$$

яғни $f(x), K(x,s) \in L_2(D)$ деп ұйғарамыз. Осы шартты қанағаттандырушы $K(x,s)$ функциясын Фредгольм ядросы деп атайды. Фредгольм ядроларына мысалдар келтірейік.

1-мысал. $K(x,s) = e^{-xs}$ ядросындағы айнымалылар $1 \leq x, s < \infty$ болғанда e^{-xs} фредгольмдік ядро болады, ал $0 \leq x, s < \infty$ болса, онда ол фредгольмдік ядро болмайды.

$$\text{Расында } \int_1^\infty \int_1^\infty |e^{-xs}|^2 ds dx = \frac{1}{2} \int_1^\infty e^{-2x} dx < \infty, \quad \int_0^\infty \int_0^\infty |e^{-xs}|^2 ds dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dx}{x} = \infty.$$

2-мысал. Егер интегралдық теңдеудің ядросы

$$K(x,s) = \frac{A(x,s)}{|x-s|^\alpha}, \quad a \leq x, s \leq b, \quad (3)$$

мұндағы $A(x,s)$ – үзіліссіз функция және $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ болса, онда ядро фредгольмдік болады, ал $\alpha \geq \frac{1}{2}$ болса, ол ядро фредгольмдік болмайды.

Егер (3) ядросында $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ болса, онда ядро ерекшелігі әлсіз немесе полярлық ерекшелікті ядро деп, ал теңдеу ерекшелігі әлсіз интегралдық теңдеу деп аталады. Егер $\alpha = 1$ болса, онда $K(x,s) = A(x,s)|x-s|^{-1}$ интегралданбайтын функция болады. Бұл функциядан алынған интеграл тек Кошидің бас мәні мағынасында ғана бар болуы мүмкін. Ядросы $K(x,s) = A(x,s)|x-s|^{-1}$ түріндегі интегралдық теңдеуді сингулярлық интегралдық теңдеу, ал басқаларын регулярлық интегралдық теңдеулер деп атайды. Бір аргументті сингулярлық интегралдық теңдеудің жалпы түрі:

$$a(x)\varphi(x) - \frac{b(x)}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(s)}{s-x} ds + \int_{\Gamma} K(x,s)\varphi(s) ds = f(x),$$

мұнда, Γ – комплекс жазықтықтағы тұйық немесе тұйық емес қарапайым доғалар жиыны: $x, s \in \Gamma$, $a(x), b(x)$ және $f(x)$ функциялар Γ доғасында анықталған, ал $K(x,s) \in L_2(\Gamma \times \Gamma)$.

Біз тек сызықтық регулярлық интегралдық теңдеулерді ғана қарастырамыз. Интегралдық теңдеулерді бір аргументті функция үшін ғана емес, көп аргументті функциялар үшін де қарастыруға болады.

Мәселен, Фредгольмнің 2-текті интегралдық $\varphi(x) = \lambda \int_{\Omega} K(x,s)\varphi(s) ds + f(x)$ теңдеуіне ядро $K(x,s) \in L_2(\Omega \times \Omega)$, бос мүше $f(x) \in L_2(\Omega)$, ал $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$, $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in \Omega \in R^n$.

Фредгольмнің 2-текті сызықтық интегралдық теңдеулер жүйесі

$$\varphi_\ell(x) - \lambda \sum_{j=1}^n \int_a^b K_{\ell j}(x, s) \varphi_j(s) ds = f_\ell(x), \quad \ell = 1, 2, \dots, n$$

түрінде өрнектеледі. Егер $\varphi(x) = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$, $f(x) = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ векторлар, ал ядро $K(x, s)$ элементтері $K_{\ell j}(x, s)$ болатын матрица деп карасак, онда (1) жүйені теңдеуі түрінде жазуға болады.

Дәл осылай екі аргументті функция үшін Вольтерра теңдеуі

$$\varphi(x, y) = \lambda \int_a^x \int_a^y K(x, y; s, t) \varphi(s, t) ds dt + f(x, y)$$

түрінде, ал жүйесін

$$\varphi_\ell(x) = \lambda \sum_{j=1}^n \int_a^x K_{\ell j}(x, s) \varphi_j(s) ds + f_\ell(x), \quad \ell = 1, 2, \dots, n$$

түрінде өрнектеуге болады.

Математикалық, физикалық кейбір қолданбалы есептерді шешу сызықтық емес интегралдық теңдеулерді шешуге алып келеді. Сондықтан кейбір практикалық және теориялық маңызы бар бірнеше сызықтық емес интегралдық теңдеулерді зерттеусіз келтірейік.

1) Гаммерштейн теңдеуі:

$$\varphi(x) = \int_{\Omega} K(x, s) F(s, \varphi(s)) ds + f(x),$$

мұндағы, $K(x, s)$ - фредгольмдік ядро.

2) Урысон теңдеуі:

$$\varphi(x) = \int_{\Omega} K(x, s, \varphi(s)) ds + f(x),$$

мұндағы, $K(x, s, \varphi(s))$ – үзіліссіз функция; $x, s \in \overline{\Omega}$, $|\varphi| < M$, ал M – шенелген он шама.

3) Вольтерраның сызықтық емес теңдеуі:

$$\varphi(x) = \int_a^x F(x, s, \varphi(s)) ds + f(x),$$

мұндағы, $F(x, s, t)$ – үзіліссіз функция, $D \equiv \{a \leq x, s \leq b\}$, $|t| \leq M$ облысында анықталған.

4) Ляпунов-Лихтенштейн теңдеуі:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K_1(x, s) \varphi(s) ds + \int_a^b \int_a^b K_{11}(x, s, t) \varphi(t) \varphi(s) ds dt,$$

мұндағы, K_1 мен K_{11} үзіліссіз функциялар.

Егер теңдеулерде белгісіз функцияның интегралымен қоса туындылары да бар болса, ондай теңдеулерді интегро-дифференциалдық теңдеулер дейміз. Мысал үшін мына ең қарапайым интегро-дифференциалдық теңдеулерді келтірейік:

$$\frac{d\varphi}{dx} = a(x)\varphi(x) + \int_{\alpha}^x K(x,s)\varphi(s)ds + f(x); \quad (4)$$

$$\frac{d\psi}{dx} = b(x)\psi(x) + \int_{\alpha}^x K(x-s)\psi(s)ds + F(x), \quad (5)$$

мұнда белгісіз функциялардың бірінші ретті туындылары бар болғандықтан, бұл теңдеулердің шешімі жалғыз болуы үшін қосымша $\varphi(\alpha) = A$, $\psi(\alpha) = B$ шарттары берілуі қажет.

Қолданбалы математикада интегро-дифференциалдық сызықтық, сызықтық емес теңдеулер немесе теңдеулер жүйесі және жоғарғы ретті туындылы (кәдуілгі және дербес туындылы) интегро-дифференциалдық теңдеулер көп кездеседі. Мысалы,

$$L\varphi \equiv \frac{d^2\varphi}{dx^2} + a_1(x)\frac{d\varphi}{dx} + a_2(x)\varphi(x) = \int_{\alpha}^{\beta} K(x,s)\varphi(s)ds + f(x)$$

теңдеуінің $\varphi(\alpha) = A_0$, $\varphi'(\alpha) = A_1$ бастапқы шарттарын немесе $\varphi(\alpha) = A$, $\varphi(\beta) = B$ шекаралық шарттарын қанағаттандыратын шешімін табу есебін қарастыруға болады. Егер белгісіз функция көп аргументті болса, онда интегро-дифференциалдық теңдеулерде белгісіз функциялардың дербес туындылары мен интегралдары көп өлшемді болады. Интеграл астындағы өрнекте белгісіз функциялардың туындылары болатын интегро-дифференциалдық теңдеулер жиі кездеседі. Кейбір жағдайларда интеграл астындағы туындының реті жоғары болса, ондай теңдеулердің шешімдері барлық уақытта бола бермейді және шешімнің бар екенін дәлелдеген күнде оны табу оңай емес. Ал егер интеграл сыртындағы өрнекте белгісіз функциялардың туындылары жоғарғы ретті болса, көп жағдайда мұндай интегро-дифференциалдық теңдеулерді жүйелерге дифференциалдық және интегралдық теңдеулердің, жүйенің жалпы теориясын пайдаланып шешуге болады.

3-мысал. (4) пен (5) теңдеулерін сызықтық интегралдық теңдеулерге келтірейік. Ол үшін:

$$\int_{\alpha}^{\beta} K(x,s)\varphi(s)ds + f(x) = Q(x)$$

деп белгілесек, онда (4) теңдеуінен $\varphi'(x) - a(x)\varphi(x) = Q(x)$ 1-ретті сызықтық дифференциалдық теңдеуін аламыз. Оның шешімі:

$$\varphi(x) = e^{\int_{\alpha}^x a(s)ds} \left[A + \int_{\alpha}^x Q(s) e^{-\int_{\alpha}^s a(\tau)d\tau} ds \right].$$

Бұл өрнекке $Q(s)$ -тің мәнін қойсақ,

$$\varphi(x) = \int_{\alpha}^x \left\{ \int_t^x K(s,t) e^{-\int_{\alpha}^s a(r) dr} ds \right\} \varphi(t) dt + A e^{\int_{\alpha}^x a(s) ds} + \int_{\alpha}^x f(s) e^{-\int_{\alpha}^s a(r) dr} ds.$$

Мұнда,

$$\begin{aligned} \bar{K}(x,t) &= \int_t^x K(s,t) e^{-\int_{\alpha}^s a(r) dr} ds, \\ \bar{f}(x) &= A e^{\int_{\alpha}^x a(s) ds} + \int_{\alpha}^x f(s) e^{-\int_{\alpha}^s a(r) dr} ds \end{aligned}$$

белгілеулер енгізсек, онда біз Вольтерраның 2-текті сызықтық

$$\varphi(x) = \int_{\alpha}^x \bar{K}(x,t) \varphi(t) dt + \bar{f}(x)$$

теңдеуін аламыз. Осы әдіспен (5) теңдеуін Фредгольмнің 2-текті сызықтық интегралдық теңдеуіне келтіруге болады.

§1.2. Интегралдық теңдеуге келтірілген есептер

1. Абель есебі. (ξ, η) вертикаль жазықтығында материалдық нүкте өзінің ауырлық күші әсерінен қисық сызық бойымен қозғалады. Берілген $f(y) = t$ уақытта дене алғашқы жылдамдықсыз ординатасы y болған нүктеден ξ осіне жететін қисық сызықты табу керек. Қозғалатын нүктенің жылдамдығының абсолютті шамасы: $v = \sqrt{2g(y - \eta)}$.

Егер $\alpha = \alpha(\eta)$ арқылы белгісіз қисықтың (ξ, η) нүктесіне жүргізілген жанаманың ξ осімен жасайтын бұрышын белгілесек, онда

$$\frac{d\eta}{dt} = -\sqrt{2g(y - \eta)} \sin \alpha$$

шамасы жылдамдықтың η осі бойынша құраушысы болады. Соңғы теңдіктен

$$dt = \frac{d\eta}{\sqrt{2g(y - \eta)} \sin \alpha}.$$

Мұны 0-ден y -ке дейін интегралдап, әрі $\varphi(\eta) = \frac{1}{\sin \alpha(\eta)}$ деп белгілесек, онда

біз Абель теңдеуін аламыз:

$$\int_0^y \frac{\varphi(\eta)}{\sqrt{y-\eta}} d\eta = -\sqrt{2g} f(y).$$

Егер бұл өрнектен $\varphi(y)$ функциясын анықтасак, онда іздеген қисық сызықты табу қиын емес. $\varphi(\eta) = \frac{1}{\sin \alpha(\eta)}$ теңдігінен $\eta = \psi(\alpha)$ екенін анықтаймыз. Содан кейін $\eta'(\xi) = \frac{d\eta}{d\xi} = \operatorname{tg} \alpha$ болғандықтан, $d\xi = \frac{d\eta}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{\psi'(\alpha) d\alpha}{\operatorname{tg} \alpha}$. Бұл өрнекті интегралдап, $\xi = \int \frac{\psi'(\alpha)}{\operatorname{tg} \alpha} d\alpha \equiv \psi_1(\alpha)$ екенін анықтаймыз. Сонымен, анықтайтын сызық $\xi = \psi_1(\alpha), \eta = \psi_2(\alpha)$ параметрлік теңдеулерімен беріледі екен.

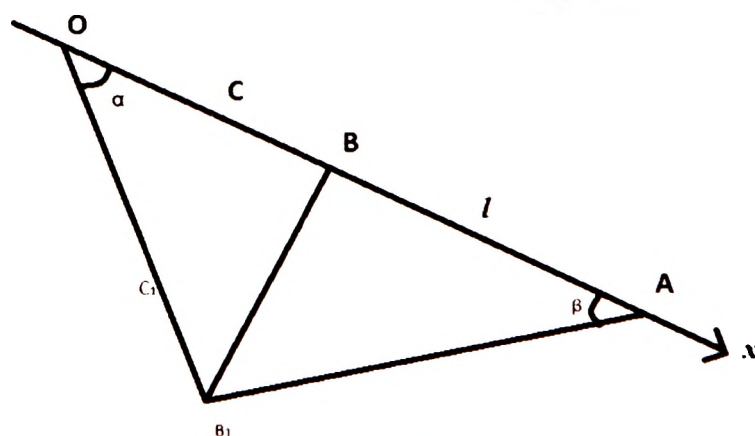
2. Шектің тербелуі. Ұзындығы ℓ серпімді (2-сурет) шек тыныштық кезінде Ox осіндегі OA кесіндісімен дәл келсін. Шектің шекаралары O мен A нүктелерінде бекітілген. T шектің керілу күші. Шекке $x = \xi$ болатындай B нүктесінде вертикаль P күші әсер етсін. Бұл күштің әсерінен OA шегі OB_1A сынық сызығы түрін қабылдайды. Сонда $BB_1 = \delta$ шамасын OB -мен және BA -мен салыстырғанда өте аз шама деп қарастырамыз. Тепе-теңдік заңының шарты бойынша шығатыны: $T \sin \alpha + T \sin \beta = p$. δ -ның өте аз шама екенін ескерсек,

$$\sin \alpha \approx \frac{\delta}{\xi}, \quad \sin \beta \approx \frac{\delta}{\ell - \xi},$$

олай болса, алдыңғы шарт

$$T \frac{\delta}{\xi} + T \frac{\delta}{\ell - \xi} = p$$

түрінде жазылады. Бұл соңғы өрнектен $\delta(\xi) = p \frac{(\ell - \xi)\xi}{T\ell}$.



2-сурет

Абсциссасы x -ке тең C нүктесіндегі шектің иілуін $y(x)$ арқылы белгілейік. $x < \xi$ болсын. $\triangle OCC_1$ және $\triangle OBB_1$ ұқсастығынан

$$\frac{y(x)}{\delta(\xi)} = \frac{x}{\xi}, \quad y(x) = \frac{x}{\xi} \delta(\xi) = \frac{(\ell - \xi)x}{T\ell} p, \quad 0 \leq x \leq \xi.$$

Дәл осылай $x > \xi$ болса, онда

$$y(x) = \frac{(l-x)\xi}{Tl} p, \quad \xi \leq x \leq l.$$

Сонымен $y(x) = pG(x, \xi)$, мұнда,

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{x(l-\xi)}{Tl}, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \frac{\xi(l-x)}{Tl}, & \xi \leq x \leq l \end{cases}$$

Грин функциясы деп аталады. Бұл өрнектен $G(x, \xi) = G(\xi, x)$ екенін оңай көруге болады. Егер шектің барлық нүктелеріне сызықтық тығыздығы $p(\xi)$ үзіліссіз таралған күш әсер етсе, онда шектің иілуі

$$y(x) = \int_0^l p(\xi) G(x, \xi) d\xi \quad (6)$$

өрнекпен анықталды.

Мына есептерді қарастыралық.

а) Шектің иілуі $y = f(x)$ болғанда оған әсер етуші күштің $p(\xi)$ тығыздығын табу керек болсын. Сонда Фредгольмнің 1-текті

$$\int_0^l G(x, \xi) p(\xi) d\xi = f(x)$$

теңдеуін шешуге келеміз, яғни бұл теңдеуден белгісіз $p(\xi)$ -ді тапсақ, есеп шешілген болады.

ә) Шекке уақыт өткен сайын өзгеріп тұратын абсциссасы ξ болатын нүктеде тығыздығы $p(\xi) \sin \omega t$ болатын күш әсер етсін. Бұл күштің әсерінен шек қозғалысқа түседі. Ол $y(x) = \varphi(x) \sin \omega t$ периодты тербеліспен қозғалсын. Ол кезде уақыттың t мезетте шектің $\Delta \xi$ бөлігіне жоғарыдағы күштен басқа $-\rho(\xi) \frac{d^2 y}{dt^2} \Delta \xi =$

$= \rho(\xi) \varphi(\xi) \omega^2 \sin \omega t$ инерция күші әсер етеді. Сондықтан (6) теңдік

$$\varphi(x) \sin \omega t = \int_0^l G(x, \xi) [\rho(\xi) \sin \omega t + \omega^2 \rho(\xi) \varphi(\xi) \sin \omega t] d\xi$$

түрінде жазылады. Міне, бұл өрнектен

$$\varphi(x) = \omega^2 \int_0^l K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi + f(x),$$

яғни $\varphi(x)$ -ке қатысты, Фредгольмнің 2-текті интегралдық теңдеуі алынды, мұнда,

$$K(x, \xi) = \rho(x)G(x, \xi), \quad f(x) = \int_0^l G(x, \xi) \rho(\xi) d\xi.$$

§1.3. Дифференциалдық теңдеулер үшін Коши есебі мен шекаралық есептерді шешуді интегралдық теңдеуге келтіру

Бұл параграфта біз дифференциалдық және интегралдық теңдеулер арасындағы байланысты көрсетеміз.

1) Кәдуілгі дифференциалдық теңдеу үшін Коши есебін шешу Вольтерраның интегралдық теңдеуіне келтіріледі. 1-ретті кәдуілгі дифференциалдық теңдеу $y'(x) = f(x, y(x))$ үшін бастапқы шарт $y(x_0) = y_0$ берілсін.

$y = y(x)$ функциясы осы Коши есебінің шешімі делік. Оны теңдеуге қойып, алынған тепе-теңдікті x_0 -ден x -ке дейін интегралдап,

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds$$

интегралдық теңдеуін аламыз. Мұның шешімі $y(x)$ функциясы берілген есептің де шешімі екенін тексеру қиын емес.

Коэффициенттері үзіліссіз функциялар болатын n -ретті сызықтық дифференциалдық теңдеу үшін Коши есебін шешу де 2-текті Вольтерраның интегралдық теңдеуін шешуге келтіріледі. Бұл жағдайды мына 2-ретті теңдеу үшін қарастырамыз: $y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_2(x)y(x) = f(x)$ теңдеуі үшін $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$ бастапқы шарттары берілсін. Бұл есепте $y''(x) = \varphi(x)$ деп белгілеп, одан кейін теңдікті бастапқы шарттарды пайдаланып интегралдау нәтижесінде

$$y'(x) = y_1 + \int_{x_0}^x \varphi(s) ds, \quad y(x) = y_0 + y_1 x + \int_{x_0}^x ds \int_{x_0}^s \varphi(s_1) ds_1 = y_0 + y_1 x + \int_{x_0}^x (x-s) \varphi(s) ds$$

теңдеуін аламыз. Ал соңғы өрнектерді пайдаланып, берілген теңдеуден

$$\varphi(x) + \int_{x_0}^x K(x, s) \varphi(s) ds = f(x)$$

Вольтерраның 2-текті интегралдық теңдеуін аламыз, мұндағы,

$$K(x, s) = a_1(x) + a_2(x)(x-s), \quad f(x) = f_0(x) - y_1 a_1(x) - (y_0 + y_1 x) a_0(x).$$

Мысалы, $y''(x) + x^2 y'(x) + x y(x) = 1 - 4x^2$ дифференциалдық теңдеуінің $y(0) = 0$, $y'(0) = -2$ бастапқы шарттарын қанағаттандыратын шешімін табу керек.

Осы Коши есебін интегралдық теңдеумен алмастырайық. Ол үшін белгісіз $y(x)$ функциясының 2-ретті туындысын жаңа белгісіз $\varphi(x)$ арқылы $y''(x) = \varphi(x)$ деп белгілесек, одан кейін бұл өрнектің екі жағын да 0-ден x -ке дейін интегралдап және бастапқы шарттарды ескеріп,

$$y'(x) = \int_0^x \varphi(s) ds - 2, \quad y(x) = -2x + \int_0^x (x-s)\varphi(s) ds$$

өрнектерін аламыз. Бұл соңғы үш өрнекті теңдеуге қойсақ,

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^x (2x^2 - xs)\varphi(s) ds$$

интегралдық теңдеуін аламыз.

2) $y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_2(x)y(x) = f(x)$ теңдеуін $y(a) = A$, $y(b) = B$ шекаралық шарттарымен қоса қарастыралық. Кәдуілгі дифференциалдық теңдеулер курсына бұл есеп Грин функциясы арқылы

$$y(x) = \int_a^b G(x,s)f(s)ds$$

түрінде шешіледі. Егер теңдеудің оң жағы $f(x, y(x))$ түрінде белгісіз $y(x)$ функциясына тәуелді күрделі функция болса, онда соңғы өрнектен

$$y(x) = \int_a^b G(x,s)f(s, y(s))ds$$

интегралдық теңдеуі шығады. Мәселен, $f_1(x) = f_0(x) + \lambda f(x, y(x))$ түрінде болса, онда біз сызықтық біртекті емес

$$y(x) = \lambda \int_a^b f_1(s)G(x,s)y(s)ds + \int_a^b G(x,s)f_0(s)ds$$

интегралдық теңдеуін аламыз.

3) Кейбір жағдайда интегралдық теңдеуді дифференциалдық теңдеуге келтіріп шешуге болады. Берілген

$$\varphi(x) = 1 + 2 \sin x + \int_0^x \cos(x-s)\varphi(s)ds$$

теңдеуін екі рет дифференциалдасақ,

$$\varphi'(x) = 2 \cos x - \int_0^x \sin(x-s)\varphi(s)ds + \varphi(x), \quad \varphi''(x) = -2 \sin x - \int_0^x \cos(x-s)\varphi(s)ds + \varphi'(x)$$

өрнектерін аламыз. Бұлардан

$$\varphi''(x) - \varphi'(x) + \varphi(x) = 1,$$

2-ретті дифференциалдық теңдеуі шығады. Жоғарыдағы өрнектерден $\varphi(0)=1$, $\varphi'(0)=3$ бастапқы шарттары алынады. Демек, интегралдық теңдеуді шешу мәселесі 2-ретті дифференциалдық теңдеуді шешудің Коши есебіне келтірілді.

Параметр λ -ға тәуелді $x^2 y'' + 2xy' = \lambda y + 1$ дифференциалдық теңдеуі $\varphi(1)=0$, $\varphi'(3)=0$ шарттарын қанағаттандыратын шекаралық есепті интегралдық теңдеуге келтірейік. Ол үшін $x^2 y'' + 2xy' = 0$ теңдеуінің алдыңғы шарттарды қанағаттандыратын Грин функциясын құрайық. Бұл теңдеудің сызықтық тәуелсіз шешімдері $y_1(x)=1$, $y_2(x)=-\frac{1}{x}$. Сондықтан Грин функциясын

$$G(x, \xi) = \begin{cases} a_1(s) + a_2(s) \frac{1}{x}, & 1 \leq x \leq s, \\ b_1(s) + b_2(s) \frac{1}{x}, & s \leq x \leq 3 \end{cases}$$

түрінде іздейміз, мұндағы, $a_i(s), b_i(s)$, ($i=1,2$) белгісіз функциялар. Грин функциясының шарттарын пайдалансақ, $a_i(s), b_i(s)$, ($i=1,2$) функцияларын төмендегі теңдеулер жүйесімен анықтаймыз:

$$a_1(s) + a_2(s) = 0, \quad -\frac{1}{9} b_2(s) = 0, \quad a_1(s) \frac{1}{s^2} - b_2(s) \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2}.$$

Осы жүйені шешіп, $a_1(s)=-1$, $a_2(s)=1$, $b_1(s)=\frac{s-1}{s}$, $b_2(s)=0$ екенін анықтаймыз. Демек,

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{x} - 1, & 1 \leq x \leq s, \\ 1 - \frac{1}{s}, & s \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Енді осы өрнекпен анықталған Грин функциясын пайдаланып, берілген дифференциалдық теңдеудің берілген шекаралық шарттарды қанағаттандыратын шешімін табу үшін

$$y(x) = \lambda \int_1^3 G(x, s) y(s) ds + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + 2x + 4a$$

интегралдық теңдеуін аламыз.

2. ФУНКЦИОНАЛДЫҚ АНАЛИЗДЕН КӨМЕКШІ МАҒЛҰМАТТАР

§2.1. Метрикалық кеңістіктер және олардың кейбір қасиеттері

M сызықтық жиыны берілсін. Оның кез келген $x, y \in M$ нүктелер жұбы үшін арақашықтық немесе метрика ұғымы, оң $\rho(x, y)$ шамасы енгізіліп, ол:

- 1°. $\rho(x, y) = 0 \iff x = y$ (тепе-теңдік аксиомасы);
- 2°. $\rho(x, y) = \rho(y, x), \forall x, y \in M$ (симметрия аксиомасы);
- 3°. $\rho(x, y) + \rho(y, z) \leq \rho(x, z), \forall x, y, z \in M$ (үшбұрыштар аксиомасы)

шарттарын қанағаттырса, онда M жиыны метрикалық кеңістік деп аталады. Бір жиында бірнеше метрика ұғымын анықтап, бірнеше метрикалық кеңістіктер алуға болады.

Мысалдар. 1) Арақашықтық $\rho(x, y) = |x - y|$ теңдігімен анықталған нақты сандар жиыны Q метрикалық кеңістік болады. Себебі 1°-3° аксиомалардың Q жиыны үшін орындалатыны айқын.

2) Арақашықтық

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}$$

теңдігімен анықталған $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ реттелген n нақты сандар жиыны метрикалық кеңістік түзеді. Бұл кеңістікті, әдетте, n өлшемді евклидтік кеңістік деп, оны R^n арқылы белгілейді.

3) $[a, b]$ кесіндіде анықталған барлық үзіліссіз функциялар жиыны, егер арақашықтық

$$\rho(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)| \quad (7)$$

теңдігімен анықталса, метрикалық кеңістік түзеді.

Шынында да, 1° мен 2° аксиомалардың орындалатын оңай тексеріледі, ал 3° аксиоманы тексерелік. $\forall t \in [a, b]$ үшін

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| &= |[x(t) - z(t)] + [z(t) - y(t)]| \leq |x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)| \leq \\ &\leq \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - z(t)| + \max_{a \leq t \leq b} |z(t) - y(t)| \leq \rho(x, z) + \rho(y, z). \end{aligned}$$

Бұл теңсіздік $\forall t \in [a, b]$ үшін болғандықтан:

$$\rho(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)| \leq \rho(x, z) + \rho(y, z)$$

түрінде жазылады.

Демек 3^0 – аксиома да орындалады. Сонымен арақашықтық (7) өрнегімен анықталғанда $[a, b]$ кесіндідегі барлық үзіліссіз функциялар жиыны метрикалық кеңістік түзеді; ол кеңістікті $C[a, b]$ арқылы белгілейді.

4) $[a, b]$ сегментінде квадратымен интегралданатын, яғни

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < +\infty$$

теңсіздігін қанағаттандыратын функциялар жиынын қарастырайық. Ара-қашықты

$$\rho(x, y) = \left[\int_a^b |x(t) - y(t)|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

формуласымен анықтап, жоғарыдағы аксиомалардың орындалуын тексерейік. Симметрия аксиомасының орынды екені анық. Ал тепе-теңдік аксиомасы $\rho(x, y) = 0 \Rightarrow x(t) = y(t), \forall t \in [a, b]$ үшін орындалған, яғни өлшемі нөл болатын жиында ғана $x(t)$ мен $y(t)$ бір-біріне тең емес. Үшбұрыштар аксиомасы Коши-Буняковский теңсіздігінен шығады:

$$\left(\int_a^b x(t)y(t)dt \right)^2 \leq \int_a^b x^2(t)dt \int_a^b y^2(t)dt. \quad (9)$$

Расында, егер (9) теңсіздігін $u(t), v(t)$ үшін пайдалансақ, онда

$$\begin{aligned} \int_a^b (u+v)^2 dt &\leq \int_a^b u^2 dt + 2 \int_a^b uv dt + \int_a^b v^2 dt \leq \int_a^b u^2 dt + \int_a^b v^2 dt + \\ &+ 2 \left[\int_a^b u^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_a^b v^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\left(\int_a^b u^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_a^b v^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2. \end{aligned}$$

Бұл өрнектің екі жағынан да квадраттық түбір алсақ ($u = x - z, v = z - y$), онда

$$\left[\int_a^b (x-y)^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \leq \left[\int_a^b (x-z)^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} + \left[\int_a^b (z-y)^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

болады, яғни $\rho(x, y) + \rho(y, z) \leq \rho(x, z)$, демек, үшбұрыштар аксиомасы орынды. Арақашықтық (8) формуласымен анықталғанда $[a, b]$ кесінді де квадратымен интегралданатын функциялар жиыны метрикалық кеңістік құрады, оны $L_1[a, b]$ арқылы белгілейді.

Метрикалық кеңістіктің элементтерін кеңістіктің нүктелері деп айтады. $\rho_M(x, a) < r$ (сәйкес $\rho_M(x, a) \leq r$) теңсіздігін қанағаттандыратын метрикалық M кеңістігіндегі x нүктелері жиынын центрі a нүктесінде, радиусы r болатын шар (тұйық шар) деп айтады да $S(a, r)$ ($\bar{S}(a, r)$) арқылы белгілейді.

M – кез келген метрикалық кеңістік болсын. Егер осы кеңістіктен алынған $\{x_n\} \in M$ тізбегі үшін $\rho(x_n, x_0) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, x_0 \in M$ болса, онда $\{x_n\}$ тізбегін $x_0 \in M$ нүктесіне жинақталатын тізбек дейді. Егер $\{x_n\} \in M$ тізбегі үшін $\forall \varepsilon > 0$ санына сәйкес $N(\varepsilon)$ саны табылып, барлық $n, m > N(\varepsilon)$ үшін $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса, онда $\{x_n\}$ тізбегі өзіне жинақты немесе іргелі тізбек деп аталады.

Теорема. Егер $\{x_n\}$ тізбегі $x_0 \in M$ нүктесінде жинақты болса, онда ол іргелі тізбек болады.

Дәлелдеу. $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ онда $\forall \varepsilon > 0$ үшін $N(\varepsilon)$ саны табылып, $n > N(\varepsilon)$ болғанда $\rho_M(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}, m > N(\varepsilon)$ болғанда $\rho_M(x_m, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ теңсіздігі орындалады. Бұл соңғы екі өрнектен үшбұрыштар аксиомасы бойынша $n, m > N(\varepsilon)$ үшін $\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x_0) + \rho(x_m, x_0) < \varepsilon$ теңсіздігі шығады. Бұл теңсіздіктен анықтамаға сүйеніп, $\{x_n\}$ тізбегі іргелі тізбек екеніне көзіміз жетеді.

Метрикалық кеңістікте жинақты тізбектің шегі сол кеңістіктің элементі болмайтын тізбектер кездеседі. Мысалы, R – рационал сандар жиыны болсын, мұндағы арақашықты $\rho(r_1, r_2) = |r_1 - r_2|$ өрнегімен анықтайық. Әрине R метрикалық кеңістік. Енді осы кеңістіктен $\{r_n\}$ тізбегін қарастыралық, мұнда, $r_n = \frac{1}{2^n} a$. Бұл тізбек өзіне және $r_0 = 0 \in R$ шегіне жинақты. Ал енді жалпы мүшесі

$$r_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

болған тізбекті қарастырсақ, ол өзіне жинақты, бірақ рационал сандар кеңістігінде шегі онда жатпайды (R -де), себебі

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

шегі иррационал сан.

Егер метрикалық M кеңістігінің элементтерінен құралған іргелі тізбектің шегі сол кеңістікте жатса, ондай кеңістік толық кеңістік деп аталады. Мысалы, элементтері үзіліссіз функциялар болатын $C[a, b]$ кеңістігінде ұзындық өлшемін

$$\rho(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)| \tag{7}$$

формуласымен анықтадық. $\{x_n(t)\}$ іргелі тізбегі берілсін, мұнда, $x_n(t) \in C[a, b]$; тізбек іргелі болғандықтан $\forall n, m > N(\varepsilon)$ үшін $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$. Олай болса,

$$\max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)| < \varepsilon, \quad \forall m, n > N(\varepsilon).$$

Бұл өрнек $\{x_n(t)\}$ тізбегі үшін $[a, b]$ кесіндідегі бірқалыпты жинақтылықтың Коши критерийі орынды екенін көрсетеді. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = x_0(t)$ сол тізбектің шегі болсын, демек, $x_0(t)$ бірқалыпты жинақты үзіліссіз функциялар тізбегінің шегі, олай болса, $[a, b]$ сегментінде үзіліссіз, яғни $x_0(t) \in C[a, b]$ және $\rho(x_n, x_0) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Демек, $C[a, b]$ кеңістігі толық. $L_2[a, b]$ кеңістігі де толық екенін көрсетуге болады. Нақты сандар жиыны Q ұзындық өлшемі $\rho(x, y) = |x - y|$ болғанда толық.

1-ескерту. M – метрикалық кеңістік болсын. Кез келген $M_0 \subset M$ кеңістігі де сол ұзындық өлшемімен метрикалық кеңістік болады.

2-ескерту. Егер M – метрикалық кеңістік болса, онда $M_0 \subset M$ кеңістігі толық болмауы, мүмкін, бірақ M_0 тұйық кеңістік болса, онда ол толық болады.

M мен N метрикалық кеңістіктер болсын. Егер осы кеңістіктердің нүктелері арасында өзара бірмәнді сәйкестік болып және сәйкес нүктелердің арақашықтығы сақталса, яғни, $x \leftrightarrow y, x' \leftrightarrow y', x, x' \in M, y, y' \in N \Rightarrow \rho(x, x') = \rho(y, y')$ болса, онда M мен N кеңістіктерін изометрикалық кеңістіктер деп атайды. Бір кеңістіктегі изометрикалық екі жиын туралы да айтуға болады. Әрине, изометрикалық қасиеттері ұқсас, сондықтан оларды кейде бірдей қасиетті кеңістіктер деп те атайды.

Параграфтың соңында толық емес кеңістікті қалайша толық етуге болатынын қарастырайық. M_0 толық емес метрикалық кеңістік болсын. Бұл жағдайда M толық жиыны табылатынын және оның тығыз бөлігі $M_1 \subset M$ мен M_0 изометрикалық кеңістіктер екенін дәлелдеуге болады. Бұл M жиыны изометрикалық дәлдікпен бірмәнді түрде анықталып, M_0 -дің толықтырушы кеңістігі деп аталады.

Егер сызықтық E_1 мен E_2 кеңістіктерінің элементтері арасында бірмәнді сәйкестік бар болып, сәйкес элементтері $x_1 \leftrightarrow x_2$ және $y_1 \leftrightarrow y_2$

$(x_1, y_1 \in E_1, x_2, y_2 \in E_2)$ үшін $x_1 + y_1 \leftrightarrow x_2 + y_2$ және $\lambda x_1 \leftrightarrow \lambda x_2$ шарттары орындалса, онда E_1 мен E_2 кеңістіктерді сызықты изоморфты деп аталады. Сызықты изоморфты кеңістіктер изоморфтық дәлдікпен өзара тең немесе олардың бірінен-бірі ешқандай айырмашылығы жоқ деп есептеледі.

§2.2. Сызықты нормаланған кеңістік

Егер E жиыны төмендегі шарттарды:

1) $\forall x, y \in E$ үшін белгілі бір ережемен олардың қосындысы деп аталатын $z = x + y \in E$ элементі сәйкестендірілсе;

2) $\forall x \in E$ мен $\forall \lambda \in R$ сан үшін белгілі бір ережемен олардың көбейтіндісі деп аталатын элемент $\lambda x \in E$ сәйкестендірілсе;

3) сонда: 10. $x + y = y + x$ коммутативтік; 20. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (ассоциативтік); 30. $\exists \theta$ (нөлдік элемент) және $x + \theta = x$; 40. Әрбір x үшін $\exists (-x)$ және $x + (-x) = \theta$; 50. $\forall x$ үшін $1 \cdot x = x$; 60. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ (көбейтудің ассоциативтігі); 70. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$, $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ (көбейтудің дистрибутивтігі) қанағаттандырса, онда E жиыны сызықтық кеңістік деп аталады. E жиындағы элементтерді нақты немесе комплекс сандарға көбейтуге байланысты оны нақты немесе комплексті сызықтық кеңістіктер деп ажыратады.

Мысалдар.

1. E^n жиыны векторларды қосу және оларды нақты сандарға көбейту амалдарына қатысты сызықтық кеңістік болады.

2. $C[a, b]$ үзіліссіз функциялар жиыны функцияларды қосу және оларды нақты сандарға көбейту амалдарына қатысты сызықтық кеңістік болады.

Егер E жиыны:

1) Сызықтық кеңістік болса;

2) $\forall x \in E$ үшін белгілі бір заңмен сол x элементінің нормасы деп аталатын $\|x\|$ оң сан сәйкес келіп, және мына шарттарды аксиомаларды:

10. $\|x\| > 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ (тепе-теңдік аксиомасы);

20. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ (біртектілік аксиомасы);

30. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (үшбұрыштар аксиомасы) қанағаттандырса, онда E^n -ні

сызықтық нормаланған кеңістік деп атайды. Сызықтық нормаланған кеңістікте метрику

$$\rho(x, y) = \|x - y\| \quad (10)$$

теңдігімен анықтауға болады. Міне, осы теңдікпен анықталған арақашықтық жоғарыдағы метрикуың барлық аксиомаларын қанағаттандыратынына көз жеткізуге болады. $x - \theta = x$ болғандықтан, (10) өрнегінен $\|x\| = \|x - \theta\| = \rho(x, \theta)$.

Демек, кез келген элементтің нормасы деп сол элементтің нөлдік элементіне дейінгі қашықтығына тең шаманы алуға болады.

$\{x_n\}$ тізбегі үшін $\|x_n - x_0\| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ шарты орындалса, онда $\{x_n\}$ тізбегі x_0 нүктесіне норма бойынша жинақты деп аталады, яғни $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. Егер сызықтық нормаланған кеңістік *норма бойынша жинақты* және толық болса, оны *банахтық кеңістік немесе B типтегі кеңістік* деп атайды.

Мысалдар. 1. Элементтерді қосу және санға көбейту операциялары анықталған сызықтық векторлық R^n кеңістігін $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ нормасымен B типтегі кеңістікке айналдыруға болады, мұнда $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

2. Егер $C[a, b]$ жиынында норманны

$$\|x\| = \max_{a \leq t \leq b} |x(t)|$$

түрінде анықтасақ, B типтегі кеңістік алуға болады.

$$3. L_2[a, b] \text{ кеңістігінде } \|x\| = \left(\int_a^b x^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

нормасымен B типтегі кеңістік болады.

4. $[a, b]$ сегментінде үзіліссіз $x(t)$ функцияларынан түзілген сызықтық кеңістікті қарастырайық. Бұл кеңістікті

$$\|x\| = \int_a^b |x(t)| dt \quad (11)$$

нормалы кеңістік етіп алуға болады. Ол кеңістікті $C_1[a, b]$ деп белгілейік. $C_1[a, b]$ толық кеңістік емес. Мысалы,

$$x_n(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \frac{1}{2}, \\ n-1-2nt, & \frac{1}{2} < t < \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2n}\right), \\ 0, & \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2n}\right) < t < 1 \end{cases}$$

үзіліссіз функциялары тізбегі (11) формасы бойынша үзілісті

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \frac{1}{2}, \\ 0, & \frac{1}{2} < t < 1 \end{cases}$$

функциясына жинақты. Міне, бұл мысалдан біз $\{x_n(t)\}$ тізбегі $C_1[a, b]$ класында іргелі тізбек, бірақ $C_1[a, b]$ оның шегі жоқ (себебі ол тізбек үзілісті функцияға жинақты), яғни ол толық емес.

§2.3. Сызықтық үзіліссіз операторлар

X пен Y - метрикалық кеңістіктер, ал $D \subset X$ болсын. Егер кез келген $x \in D$ элементіне белгілі бір заңдылықпен $y \in Y$ сәйкес қойылса, яғни D облысындағы элементтер сызықтық A операторы арқылы Y кеңістіктегі $y = Ax$ элементтеріне бейнелесе, онда D облысында сызықты оператор A анықталған дейді, D облысын сызықты A операторының анықталу облысы деп атайды. Егер A операторының әсері мәндерінің жиыны бүкіл Y -пен дәлме-дәл келсе, онда A операторы D -ны Y -ке бейнелейді деп айтамыз.

Мысалдар.

1. X ретінде $C[a, b]$ кеңістігін алайық. Әрбір $x(t) \in C[a, b]$ функциясына

$$y(t) = \int_a^b K(t, s)x(s)ds$$

функциясын сәйкес қойсақ, $C[a, b]$ -да анықталған K интегралдық фредгольм-дік операторын

$$y = Kx = \int_a^b K(t, s)x(s)ds$$

анықтаймыз, мұндағы, $K(t, s)$ берілген $a \leq t, s \leq b$ тіктөртбұрышында үзіліссіз функция.

2. $[a, b]$ сегментінде ақырсыз дифференциалданатын функциялар жиынын $C^\infty(a, b)$ арқылы белгілейік. Әрбір $x(t) \in C^r(a, b)$ функциясына оның туындысы $x'(t)$ сәйкестендірсек, онда $C^\infty(a, b)$ -ны $C^r(a, b)$ жиынына бейне-лейтін дифференциалдау операторы $A \equiv \frac{d}{dt}$ анықтаймыз.

X пен Y сызықтық кеңістіктер болсын. Егер X -ті Y -ке бейнелейтін A операторы үшін: 1) $\forall x_1, x_2 \in X, A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$ (аддитивтік); 2) $\forall x \in X$ пен α саны үшін $A(\alpha x) = \alpha Ax$ (біртектілік) шарттары орындалса, онда A операторы сызықтық оператор деп аталады.

Мысалдар.

1. X жиынының кез келген ақырлы элементін қайтадан өзіне сәйкестендіруші $Ix = x$ өрнегімен берілген I операторы сызықтық оператор болады. Әдетте, бұл I операторын бірлік немесе тепе-теңдік оператор деп атайды.

2. $X = Y = C[a, b]$ болсын. Үзіліссіз $K(t, s)$ ядролы фредгольмдік интегралдық оператор $Ax = \int_a^b K(t, s)x(s)ds$ сызықты және үзіліссіз болатынын дәлелеу қиын емес.

X пен Y – сызықты нормаланған кеңістіктер, ал $D(A)$ кеңістігі X -ті Y -ке бейнелейтін A операторының анықталу облысы болсын. Егер $\forall \varepsilon > 0$ санына сәйкес $\delta > 0$ саны табылып, $\forall x, x_0 \in D(A)$ нүктелері $\|x - x_0\|_X < \delta$ болғанда $\|Ax - Ax_0\|_Y < \varepsilon$ теңсіздігін қанағаттандырса, онда A операторы $x_0 \in D(A)$ нүктесінде үзіліссіз деп айтады.

1-теорема. Сызықты нормаланған X кеңістігіне анықталған X -ті Y -ке бейнелейтін және $x_0 \in X$ нүктесінде үзіліссіз A операторы бүкіл X кеңістігінде үзіліссіз болады.

Дәлелдеуі. x нүктесі X жиынының кез келген элементі болсын және $x_n \rightarrow x, n \rightarrow \infty$ шарты орындалсын. Ол кезде $x_n - x + x_0 \rightarrow x_0, n \rightarrow \infty$. Ал A операторы x_0 нүктесінде үзіліссіз болғандықтан

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(x_n - x + x_0) = Ax_0.$$

Екінші жағынан, A операторының сызықтық болуына байланысты $A(x_n - x + x_0) = Ax_n - Ax + Ax_0$. Сондықтан $\lim_{n \rightarrow \infty} (Ax_n - Ax + Ax_0) = Ax_0$, бұл өрнектен $\lim_{n \rightarrow \infty} Ax_n = Ax$ теңдігі шығады. Демек, A операторы $\forall x \in X$ нүктесінде үзіліссіз.

X -ті Y -ке бейнелейтін сызықтық A операторы бүкіл X -те аныкталып, $\forall x \in X$ үшін $M > 0$ саны табылып, $\|Ax\|_Y \leq M \|x\|_X$ теңсіздігі орындалса, онда A - ны шенелген оператор деп атайды.

Сызықтық операторлар арасында олардың шенелгендігі мен үзіліссіздігі тығыз байланыста екенін мына тұжырым көрсетеді.

2-теорема. Сызықтық A операторы үзіліссіз болуы үшін оның шенелген болуы қажетті де жеткілікті.

Дәлелдеуі. A -шенелген оператор және $x_n \rightarrow x_0, n \rightarrow \infty$ болсын. Сонда, егер $n \rightarrow \infty$ жағдайда $\|Ax_n - Ax_0\| = \|A(x_n - x_0)\| \leq M \|x_n - x_0\| \rightarrow 0$ демек, A үзіліссіз оператор. Енді A - үзіліссіз деп ұйғарайық. Сонда $|x| < \delta \Rightarrow \|Ax\| < \varepsilon$. Егер $\varepsilon = M \|x\|$ десек, онда $\|Ax\| \leq M \|x\|$, яғни A -шенелген оператор.

$$M_0 = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$$

өрнегімен анықталған M_0 саны A операторының нормасы деп аталады да $\|A\|$ символымен белгіленеді.

Сызықтық операторларға амалдар қолдану. Сызықтық нормаланған X -ті Y -ке бейнелейтін $A, B, C, \dots$ сызықтық операторларын қарастырайық.

Егер $\forall x \in X$ элементі үшін A мен B сызықтық операторлары $Ax = Bx$ теңдігін қанағаттандырса, онда A мен B операторлары бір-біріне тең деп атайды да $A = B$ деп белгілейді. $(A + B)x = Ax + Bx, \forall x \in X$ теңдігін қанағаттандыратын $A + B$ операторын A мен B операторларының қосындысы деп атайды. Сызықтық A операторының скаляр λ санына көбейтіндісі деп $(\lambda A)x = \lambda(Ax), \forall x \in X$ өрнекті қанағаттандыратын λA сызықтық операторын айтады.

X кеңістігінің барлық нүктелері үшін $Ox = \theta$ өрнегін қанағаттандыратын сызықтық операторды нөлдік оператор деп атап, оны O символымен белгілейді. Әрбір сызықтық A операторы үшін әрқашан оған теріс оператор деп аталатын $-A$ операторы бар болады, ол $-A = (-1)A$ өрнегімен анықталады.

Мына тұжырымның дұрыстығына оңай көз жеткізуге болады. X -ті Y -ке бейнелейтін операторлар жиыны $L(X, Y)$ жоғарыдағы операторларды қосу, скаляр санға көбейту, нөлдік оператор және теріс оператор ұғымдарымен сызықтық кеңістік түзеді. Оның үстіне бұл жиын сызықтық нормаланған кеңістік және ол толық болады.

$L(X, Y)$ жиындағы сызықтық A мен B операторларының көбейтіндісі деп $ABx = A(Bx), \forall x \in X$ өрнегін қанағаттандыратын AB операторын айтады. Жалпы жағдайда $AB \neq BA$.

1-лемма. Сызықтық A мен B операторларының AB көбейтіндісі сызықтық оператор болады.

Расында, $\forall x, x_1, x_2 \in X$ үшін

$$AB(x_1 + x_2) = A(B(x_1 + x_2)) = A(Bx_1 + Bx_2) = ABx_1 + ABx_2;$$

$$AB(\lambda x) = A(B(\lambda x)) = A(\lambda(Bx)) = \lambda(ABx) \quad (\lambda - \text{скаляр}).$$

Демек, 1-лемма дәлелденді.

Салдар ретінде сызықтық операторлар A, B, C мен скаляр сан λ үшін:

- 1) $(AB)C = A(BC)$;
- 2) $(A + B)C = AC + BC$;
- 3) $C(A + B) = CA + CB$; 4) $\lambda(AB) = (\lambda A)B$.

Өрнектердің дұрыстығын тексеру қиын емес:

2-лемма. $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ теңсіздігі орындалады.

Шынында да, $\forall x \in X$ үшін $\|ABx\| \leq \|A\| \cdot \|Bx\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \cdot \|x\|$.

Демек,

$$\|AB\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|ABx\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

Егер $A = B$ десек, A операторының екінші дәрежесін анықтаймыз, яғни $A(Ax) = A^2x$, ал жалпы түрде $A^n = A(A^{n-1})$ екені анықталды. Әрине, $A^{n+m} = A^n \cdot A^m$.

$L(X, X)$ -тегі B операторы сол $L(X, X)$ -тегі A операторымен $AB = BA = I$ өрнегін қанағаттандырса, онда B операторын A операторына кері оператор деп атайды да, A^{-1} символымен белгілейді, мұндағы, I – бірлік оператор.

§2.4. Гильберттік кеңістік

Комплекс элементті сызықты H кеңістігінде $\forall x, y \in H$ элементтері жұбына (x, y) саны сәйкес қойылып, мына аксиомалар:

- 1°. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$;
- 2°. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;
- 3°. $(x, y) = \overline{(y, x)}$ (эрмиттік);
- 4°. $(x, x) \geq 0$, $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ (θ - нөлдік элемент) орындалса, онда (x, y) саны x пен y -тің скалярлық көбейтіндісі деп аталады.

1° – 3° - аксиомалардың логикалық салдары мына екі өрнек болады:
 $(x, \lambda y) = \overline{\lambda}(x, y)$ ($\overline{\lambda}$ – λ -ға түйіндес сан); $(x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2)$.

Мысалдар.

1. n өлшемді C^n – комплекс сандар кеңістігінде скалярлық көбейтінді

$$(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k}$$

теңдігі мен анықталады, мұнда, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

2. Элементтері нақты сандар болатын R^n кеңістігінде скалярлық көбейтінді

$$(x, y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

өрнегімен, ал R^n -дегі жалпы скалярлық көбейту амалы

$$(x, y) = \sum_{k,i=1}^n a_{ki} x_k y_i$$

өрнегімен анықталады, мұндағы, $\|a_{ki}\|$ оң анықталған матрица.

3. $L_2[a, b]$ кеңістігінде скаляр көбейту

$$(x, y) = \int_a^b x(t) \overline{y(t)} dt \quad (12)$$

өрнегімен анықталады.

Бұл көрсетілген скаляр көбейтулер үшін $1^0 - 4^0$ -аксиомалар оңай тексеріледі.

• **Ескерту.** Скалярлық көбейту амалы орындалатындай элементтері нақты сандар болатын ақырлы өлшемді кеңістік **евклидтік кеңістік** деп аталады. Ал элементтері комплекс сандар болатын ақырлы өлшемді кеңістікте скаляр көбейту амалы орынды болса, оны **унитар кеңістік** деп атайды.

Скалярлық көбейту амалы орынды болатын сызықтық кеңістік **гильберттік кеңістік** деп аталады. Гильберттік кеңістік H -тың x элементінің нормасы $\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$ саны болады.

Лемма. Кез келген гильберттік кеңістікте Коши-Буняковский теңсіздігі

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad (13)$$

орынды.

Дәлелдеуі. Егер $x = \theta$ немесе $y = \theta$ болса, онда теңсіздіктің орынды екені айқын. $y \neq \theta$ деп $z \in H$ элементін $z = \lambda y$ және $(x - z, y) = 0$, яғни

$$(x - \lambda y, y) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\overline{(x, y)}}{(y, y)}$$

болатындай етіп түзейік. Сонда

$$0 \leq (x - \lambda y, x - \lambda y) = (x - \lambda y, x) - \lambda (x - \lambda y, y) = \|x\|^2 - \frac{|(x, y)|^2}{\|y\|^2}$$

болғандықтан, бұл соңғы өрнектен (13) теңсіздігі шығады.

$\|x\| = (x, x)^{1/2}$ нормасы бойынша толық, скалярлық көбейту анықталған сызықтық кеңістік **гильберттік кеңістік** деп аталады. Мысалы, $C^n, R^n, L_2[a, b]$ кеңістіктері гильберттік кеңістіктер. Ал $C[a, b]$ кеңістігі

$$(x, y) = \int_a^b x(t)y(t)dt$$

скалярлық көбейту амалымен $\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt \right)^{1/2}$ нормасы бойынша толық емес, ол гильберттік кеңістік болмайды. Әрбір гильберттік кеңістікті толықтырса гильберттік кеңістік алынады.

Егер $\forall x, y \in H$ үшін $(x, y) = 0$ теңдігі орынды болса, онда x, y элементтерін ортогональды деп атайды. Егер $e_1, e_2, \dots, e_n$ элементтерінің жүйесі үшін

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j \end{cases}$$

шарты орындалса, онда $e_1, e_2, \dots, e_n$ элементтерінің жүйесі ортонормаланған жүйе деп аталады. Егер ортонормаланған $e_1, e_2, \dots, e_n$ элементтерінің жүйесі үшін оның әрбір элементіне ортогональ болатын нөлден басқа ешқандай элемент жоқ болса, онда берілген жүйені **толық ортонормаланған жүйе** деп атайды.

Біз алдағы уақытта $L_2[a, b]$ гильберттік кеңістігін (12) скалярлық көбейту амалымен қарастырамыз. $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x) \in L_2[a, b]$ кеңістігінде ортонормаланған жүйе және $f(x) \in L_2[a, b]$ болсын. Формалді түрде жазылған

$$\sum_{k=1}^n C_k \varphi_k(x)$$

өрнегі Фурье қатары, ал $C_k = (f, \varphi_k(x))$ сандары Фурье коэффициенттері деп аталады.

$$\left\| f - \sum_{k=1}^N C_k \varphi_k \right\|^2 = \left(f - \sum_{k=1}^N C_k \varphi_k, f - \sum_{k=1}^N C_k \varphi_k \right) \geq 0$$

болғандықтан, бұл өрнекті ықшамдап,

$$(f, f) - \sum_{k=1}^N C_k (f, \varphi_k) - \sum_{k=1}^N C_k (\varphi_k, f) + \sum_{k=1}^N C_k^2 \geq 0$$

екенін көреміз (мұнда біз $\{\varphi_k\}$ ортонормаланған жүйе екенін ескердік). Егер $(f, \varphi_k) = (\varphi_k, f) = C_k$ екенін ескерсек, соңғы теңсіздіктен

$$\sum_{k=1}^N C_k^2 \leq \|f\|^2$$

екенін көреміз. Бұл өрнек кез келген N үшін орынды болғандықтан,

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k^2 \leq \|f\|^2$$

теңсіздігін аламыз, ол **Бессель теңсіздігі** деп аталады.

Егер осы соңғы өрнек теңдік мағынасында орындалса, онда біз $\{\varphi_k(x)\}$ жүйенің тұйықтық шарты деп аталатын Парсевал-Стеклов тепе-теңдігін аламыз.

Рисс-Фишер теоремасы. Егер $\{\varphi_k(x)\}$ ортонормаланған жүйе болып, ал сандық қатар

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k^2$$

жинақты болса, онда

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \varphi_k(x) \tag{14}$$

қатары орташа жинақты болады бұл жағдайда (14) қатары тұйықтық шарты орындалған Фурье қатары болады.

Дәлелдеуі. (14) қатарының бөлігін қарастырайық:

$$S_n = \sum_{k=1}^n C_k \varphi_k(x).$$

Бұдан:

$$\|S_{n+\rho} - S_n\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+\rho} C_k \varphi_k \right\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+\rho} C_k^2,$$

бұл жинақты (14) қатарының қалдық мүшесі, әрине, ол $n \rightarrow \infty$ жағдайда нөлге ұмтылады, олай болса, (14) қатары орташа мағынада жинақты. (14) қатарының қосындысы $f(x)$, яғни

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \varphi_k(x) \tag{15}$$

деп белгілейік. (15) өрнегінің екі жағында $\varphi_n(x)$ -ке көбейтіп, $\{\varphi_n(x)\}$ жүйенің ортонормаланған екенін еске алып, $C_k = (f, \varphi_k)$ екенін анықтаймыз. Сонымен (14) қатарын $f(x)$ -ке $L_2[a, b]$ -де скалярлық көбейтіп,

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} C_k (\varphi_k, f) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k^2$$

тұйықтық шартын аламыз.

Кез келген гильберттік кеңістік H -та мына тұжырым орынды.

Теорема. H -гильберттік кеңістік, ал $\{e_k\}$ сондағы ортонормаланған жүйе болсын. Сонда мына қасиеттер эквивалентті: 1) Әрбір $x \in H$ элементі өзінің Фурье қатарының қосындысы болады; 2) $\{e_k\}$ жүйесі толық; 3) $\forall x \in H$ үшін Парсвал-Стеклов теңдігі

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} C_k^2$$

орынды.

Шмидт әдісі бойынша ортогональдау. Егер ақырлы немесе ақырсыз санды сызықты тәуелсіз функциялар жүйесі $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x), \dots$ берілсе, онда бұл жүйеден $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ түріндегі ортонормаланған жүйе құруға болады. Соңғы жүйедегі әрбір $\varphi_n(x)$ функциясы $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x), \dots$ арқылы сызықты өрнектеледі, әрине бұл жағдай керісінше де болады, яғни әрбір $\psi_n(x)$ функциясы $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ арқылы сызықты өрнектеледі.

Бұл ортогональдау үдерісі мына Шмидт алгоритмі бойынша іске асады:

$$\varphi_1(x) = \frac{\psi_1(x)}{\|\psi_1(x)\|}, \quad \varphi_2(x) = \frac{g_2(x)}{\|g_2(x)\|}, \quad g_2(x) = \psi_2(x) - (\psi_2, \varphi_1)\varphi_1, \dots, \varphi_n(x) = \frac{g_n(x)}{\|g_n(x)\|},$$

$$g_n(x) = \psi_n(x) - \sum_{k=1}^{n-1} (\psi_n, \varphi_k)\varphi_k, \dots$$

міне, бұл алгоритмнен біз $\{\varphi_k(x)\}$ жүйесі ортонормаланған және әрбір $\varphi_n(x)$ $(\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x), \dots)$ арқылы сызықты өрнектелгенін көреміз.

Өзара түйіндес сызықтық операторлар. H -гильберттік кеңістік, ал $A^* \in L(H, H)$ шенелген сызықтық оператор болсын. $A^* \in L(H, H)$ операторы және $\forall x, y \in H$ үшін

$$(Ax, y) = (x, A^* y) \quad (16)$$

теңдігі орындалса, онда A^* операторы A -ның түйіндес операторы деп аталады. Егер A -сызықтық оператор болса, онда A^* операторы да сызықтық оператор болады. Бұл мына

$$\begin{aligned} (Ax, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) &= \overline{\alpha_1} (Ax, y_1) + \overline{\alpha_2} (Ax, y_2) = \\ &= \alpha_1 (x, A^* y_1) + \alpha_2 (x, A^* y_2) = (x, A^* (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)) \end{aligned}$$

қатынастан шығады. A операторы үшін жалғыз ғана түйіндес A^* операторы бар болады, оның үстіне:

$$\begin{aligned}(A^*)^* &= A, (A_1 + A_2)^* = A_1^* + A_2^*, \\ (A_1 A_2)^* &= A_2^* A_1^*, (\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*.\end{aligned}$$

Егер A шенелген оператор болса, онда A^* шенелген оператор және олардың нормалары бірдей болатынын көрсету қиын емес.

Расында (16) теңдігінде $x = A^* y$ деп алмастырсақ,

$$(A^* y, A^* y) = \|A^* y\|^2 = (AA^* y, y).$$

Міне, бұдан Коши-Буняковский теңсіздігі бойынша

$$\|A^* y\|^2 \leq \|AA^* y\| \cdot \|y\| = \|A\| \cdot \|A^* y\| \cdot \|y\|$$

немесе

$$\|A^* y\| \leq \|A\| \cdot \|y\|.$$

Бұл теңсіздік A^* операторының шенелгенін, яғни $\|A^*\| \leq \|A\|$ екенін көрсетеді. Егер де (16) теңдігіне $y = Ax$ деп ауыстырсақ, онда $\|A\| \leq \|A^*\|$ екенін көреміз. Демек, $\|A\| = \|A^*\|$.

Егер $A \in L(H, H)$ операторы үшін $A = A^*$ шарты орындалса, онда A операторын өзіне-өзі түйіндес оператор деп атайды. Мысалы, $L_2(a, b)$ кеңістігінде Фредгольм операторы $A\varphi = \int_a^b K(x, s)\varphi(s)ds$, ал түйіндес оператор $A^*\varphi = \int_a^b \bar{K}(x, s)\varphi(s)ds$ болады.

3. ҚЫСЫП БЕЙНЕЛЕУ ӘДІСІ ЖӘНЕ ОНЫ ҚОЛДАНУ

§3.1. Қысып бейнелеу әдісі

Алгебралық, дифференциалдық, интегралдық және функционалдық теңдеулердің шешімдері бар және олар жалғыз болуын дәлелдеуге біртіндеп жуықтау әдісі, яғни қысып бейнелеу әдісі қолданылады. Қысып бейнелеу әдісінің мазмұнын төмендегі тұжырымнан білуге болады.

1-теорема (Банахтікі). Толық метрикалық X кеңістігінің кез келген элементін сол кеңістіктің өзіне бейнелейтін A операторы берілсін: яғни $X \xrightarrow{A} X$. Оның үстіне $\forall x, y \in X$ элементтері

$$\rho(Ax, Ay) \leq \alpha \rho(x, y) \quad (17)$$

теңсіздігін қанағаттандыратын (мұндағы, α саны x пен y элементтерінен тәуелсіз және $0 < \alpha < 1$). Сонда X кеңістігінде жалғыз ғана элементі табылып, ол

$$Ax_0 = x_0 \quad (18)$$

теңдеуін қанағаттандырады.

(17) теңсіздігін қанағаттандыратын A операторын қысу операторы деп, ал (18) теңдеуін қанағаттандыратын $x_0 \in X$ нүктесін A операторының қозғалмайтын жалғыз нүктесі деп атайды.

Дәлелдеуі. $\forall \bar{x} \in X$ элемент алып, мынадай тізбек құрайық: $x_1 = A\bar{x}$, $x_2 = Ax_1, \dots, x_n = Ax_{n-1}, \dots$. Осы $\{x_n\}$ тізбегінің іргелі өзіне жинақты екенін көрсетейік. Алдымен

$$\begin{aligned} \rho(x_1, x_2) &= \rho(A\bar{x}, Ax_1) \leq \alpha \rho(\bar{x}, x_1) = \alpha \rho(\bar{x}, A\bar{x}), \\ \rho(x_2, x_3) &= \rho(Ax_1, Ax_2) \leq \alpha^2 \rho(\bar{x}, A\bar{x}), \dots, \rho(x_n, x_{n+1}) \leq \alpha^n \rho(\bar{x}, A\bar{x}) \end{aligned}$$

екенін байқаймыз. Егер үшбұрыш теңсіздігін пайдалансақ,

$$\begin{aligned} \rho(x_n, x_{n+p}) &\leq \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + \rho(x_{n+p-1}, x_{n+p}) \leq \\ &\leq \alpha^n (1 + \alpha + \dots + \alpha^p) \rho(\bar{x}, A\bar{x}) = \frac{\alpha^n - \alpha^{n+p}}{1 - \alpha} \rho(\bar{x}, A\bar{x}). \end{aligned}$$

Осыдан $0 < \alpha < 1$ болғандықтан

$$\rho(x_n, x_{n+p}) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \rho(\bar{x}, A\bar{x}). \quad (19)$$

Соңғы теңсіздіктен $\forall p$ үшін $n \rightarrow \infty$, $\rho(x_n, x_{n+p}) \rightarrow 0$. Демек, $\{x_n\}$ тізбегі іргелі тізбек. X кеңістігінің толықтығынан $\{x_n\}$ тізбегінің шегі $x_0 \in X$ болады:

$$x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Енді $Ax_0 = x_0$ екенін көрсетейік. Расында,

$$\rho(x_0, Ax_0) \leq \rho(x_0, x_n) + \rho(x_n, Ax_0) = \rho(x_0, x_n) + \rho(Ax_{n-1}, Ax_0) \leq \rho(x_0, x_n) + \alpha \rho(x_{n-1}, x_0),$$

элементі $x_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ болғандықтан, $\forall \varepsilon > 0$ санына сәйкес $N(\varepsilon)$ нөмірі табылып,

$$\rho(x_0, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}, \rho(x_0, x_{n-1}) < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n > N(\varepsilon) \text{ болады. Демек, } \rho(x_0, Ax_0) < \varepsilon. \text{ Мұндағы, } \varepsilon$$

кез келген сан болғандықтан $\rho(x_0, Ax_0) = 0$ яғни $x_0 = Ax_0$ теңдігі орынды.

Қысу операторының қозғалмайтын нүктесінің жалғыз екенін дәлелдейік. Ондай нүктелер екеу (x_0 және y_0), яғни $Ax_0 = x_0$, $Ay_0 = y_0$ теңдігі орындалады деп ұйғарайық. Ол жағдайда $\rho(x_0, y_0) = \rho(Ax_0, Ay_0) \leq \alpha \rho(x_0, y_0)$. Егер $\rho(x_0, y_0) > 0$ болса, онда $\alpha \geq 1$ болады. Бұл теорема шартына қайшы, демек, $\rho(x_0, y_0) = 0$, яғни $x_0 \equiv y_0$.

- **Ескерту.** (19) теңсіздіктен $\rho \rightarrow \infty$ жағдайда n – жуық шешімдегі қателік

$$\rho(x_n, x_0) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \rho(\bar{x}, A\bar{x})$$

шартымен анықталады. Бұл теңсіздік екінші жағынан тізбектің жинақтылық жылдамдығын көрсетеді.

§3.2. Қысып бейнелеу әдісін Фредгольмнің интегралдық теңдеуіне қолдану

1. Интегралдық теңдеудің ядросы $K(x, s)$ үзіліссіз функция болсын. Фредгольмнің біртекті емес

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds + f(x) \quad (20)$$

теңдеуінің шешімі бар және шешімнің жалғыз екенін дәлелдеуге қысып бейнелеу әдісін қолданайық. $K(x, s)$ ядросы $D = \{a \leq x, s \leq b\}$ облысында үзіліссіз болғандықтан шенелген, яғни $|K(x, s)| \leq M$. Ал бос мүше $f(x) \in C[a, b]$ (20) интегралдық теңдеу шешімін $C[a, b]$ класынан іздейміз. Операторды

$$K\varphi \equiv \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds$$

деп белгілейік.

1-лемма. $K\varphi$ интегралдық операторы толық және $C[a,b]$ кеңістігін сол кеңістіктің өзіне бейнелейді.

Дәлелдеуі. $\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds$ және $N = \max |\varphi(x)|$ деп белгілейік, $x, x + \Delta x \in [a,b]$ болсын. Ол кезде

$$\begin{aligned} |\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)| &= \left| \lambda \int_a^b K(x + \Delta x, s)\varphi(s)ds + f(x + \Delta x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\varphi(s)ds - f(x) \right| \leq \\ &\leq |\lambda| N \int_a^b |K(x + \Delta x, s) - K(x, s)|ds + |f(x + \Delta x) - f(x)|. \end{aligned}$$

$f(x) \in C[a,b]$ және $K(x,s) \in C(Q)$ болғандықтан $\forall \varepsilon > 0$ үшін $\delta > 0$ саны табылып, $|\Delta x| < \delta$ болғанда

$$|f(x + \Delta x) - f(x)| < \varepsilon, \quad |K(x + \Delta x, s) - K(x, s)| < \frac{\varepsilon}{2N(b-a)}$$

теңсіздіктері орындалады. Егер осы теңсіздіктерді алдыңғы өрнектің оң жағына пайдалансақ, $|\varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)| < \varepsilon$, $\forall \Delta x : |\Delta x| < \delta$ екенін көреміз, яғни $\varphi(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінің кез келген нүктесінде үзіліссіз. Демек, K операторы кез келген $\varphi(x) \in C[a,b]$ функциясын сол кеңістіктегі үзіліссіз функцияға бейнелейді екен.

Енді K қысу операторы болатын шартты анықтайық:

$$\begin{aligned} \rho(K\varphi_1, K\varphi_2) &= \max_{a \leq x \leq b} |K\varphi_1 - K\varphi_2| = \max_{a \leq x \leq b} \left| \lambda \int_a^b K(x,s)[\varphi_1 - \varphi_2]ds \right| \leq \\ &\leq |\lambda| M(b-a) \max_{a \leq x \leq b} |\varphi_1 - \varphi_2| = |\lambda| M(b-a) \rho(\varphi_1, \varphi_2). \end{aligned}$$

Міне, бұдан

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$$

шарты орындалғанда K қысу операторы болатынын көреміз. Жоғарыда дәлелденген қысып бейнелеу әдісінен, егер λ саны осы теңсіздікті қанағаттандырса, онда (20) теңдеуінің бір ғана үзіліссіз шешімі болады. Ол шешімге жуықтайтын функциялар тізбегі $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$

$$\varphi_{n+1}(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi_n(s)ds + f(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

рекуррентті теңдіктермен анықталады, мұндағы, $\varphi_0(x)$ функциясы $[a, b]$ кесіндіде анықталған кез келген үзіліссіз функция.

Мысал. Біртіндеп жуықтау әдісімен

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 x \varphi(s) ds + x$$

интегралдық теңдеуін шешу керек.

Шешуі. Нөлдік жуықтау ретінде бос мүшені, яғни $\varphi_0(x) = x$ деп алсақ, онда

$$\varphi_1(x) = x \left(1 + \frac{\lambda}{2} \right), \varphi_2(x) = x \left[1 + \frac{\lambda}{2} + \left(\frac{\lambda}{2} \right)^2 \right], \dots, \varphi_n(x) = x \left[1 + \frac{\lambda}{2} + \left(\frac{\lambda}{2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\lambda}{2} \right)^n \right], \dots$$

Бұл табылған жуық шешімдер тізбегі λ параметрі $\left| \frac{\lambda}{2} \right| < 1$ шартын қанағаттандырса, ақырлы шегі болады. Ол шек

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \frac{2x}{2 - \lambda}$$

берілген интегралдық теңдеудің шешімі болады.

2. *Қайталанған ядролар және резольвента.* Әдетте, жуықтау формуласында бастапқы жуықтау ретінде бос мүше $f(x)$ функциясын қабылдайды, яғни $\varphi_0 = f(x)$. Сонда рекуррентті формуладан жуықтау тізбегінің мүшелері

$$\varphi_1(x) = f(x) + \int_a^b K(x, s) f(s) ds \equiv (I + \lambda K) f,$$

$$\varphi_2(x) = (I + \lambda K)^2 f = f + \lambda K f + \lambda^2 K^2 f, \dots,$$

$$\varphi_n(x) = (I + \lambda K)^n f = \sum_{m=0}^n \lambda^m K^m f,$$

теңдіктерімен анықталады. Мұнда, I – бірлік оператор, $Kf = \int_a^b K(x, s) f(s) ds$, ал K^m операторы K -ның m дәрежесі.

K операторы дәрежелерін $K(x, s)$ ядросы арқылы көрейік. Анықтама бойынша $K^2 f = K(Kf) = \int_a^b K(x, t) \left\{ \int_a^b K(t, s) f(s) ds \right\} dt = \int_a^b \left\{ \int_a^b K(x, t) K(t, s) dt \right\} f(s) ds$,

Егер

$$K_2(x, s) = \int_a^b K(x, t) K(t, s) dt$$

деп белгілесек, онда

$$K^2 f = \int_a^b K_2(x,s)f(s)ds,$$

сол сияқты

$$K^3 f = K(K^2 f) = \int_a^b K(x,t) \left\{ \int_a^b K_2(t,s)f(s)ds \right\} dt = \int_a^b \left\{ \int_a^b K(x,t)K_2(t,s)dt \right\} f(s)ds.$$

Егер

$$K_3(x,s) = \int_a^b K(x,t)K_2(t,s)dt$$

деп белгілесек, онда $K^3 f = \int_a^b K_3(x,s)f(s)ds$.

Жалпы жағдайда, математикалық индукция заңымен

$$K^n f \equiv \int_a^b K_n(x,s)f(s)ds.$$

K^n операторын теңдігімен анықтауға болады, мұнда,

$$K_n(x,s) = \int_a^b K(x,t)K_{n-1}(t,s)dt. \quad (21)$$

(21) формуласымен анықталған $K_n(x,s)$ функциясы n – қайталанған ядро немесе ядроның n – интеграциясы деп аталады. Келешекте $K_1(x,s) = K(x,s)$ деп қабылдаймыз. Оператор үшін белгілі $K^{n+m} = K^n(K^m) = K^m(K^n)$ теңдігінен қайталанған ядролар үшін орындалатын

$$K_{n+m}(x,s) = \int_a^b K_n(x,t)K_m(t,s)dt = \int_a^b K_m(x,t)K_n(t,s)dt$$

теңдігін алуға болады.

Ескерте кетейік, егер $D = \{a \leq x, s \leq b\}$ облысында $K(x,s)$ ядросы үзіліссіз функция болса, онда барлық қайталанған ядролар да $D = \{a \leq x, s \leq b\}$ облысында үзіліссіз функциялар болатыны көрініп тұр.

Қарастырылып отырған Фредгольм теңдеуінің шешімі

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x)$$

болғандықтан

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^m K^m f = f(x) + \lambda \sum_{m=1}^{\infty} \int_a^b K_m(x,s)f(s)ds \quad (22)$$

формуласын аламыз. (22) теңдеуінің оң жағында тұрған қатардың $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$ шарты орындалғанда бірқалыпты жинақты болатынына көз жеткізу қиын емес.

Әдетте оны Нейман қатары деп атайды. Жоғарыда алынған тұжырымдардың қорытындысы келесі тұжырымды береді.

2-теорема. Егер $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$, $f \in C[a, b]$, $K(x, s) \in C(D)$ болса, онда кез келген 2-текті Фредгольмнің теңдеуінің $C[a, b]$ кеңістігінде жататын жалғыз шешімі бар болады және ол шешім (22) формуласымен өрнектеледі. Яғни $|\lambda| \leq \frac{1}{M(b-a)}$ дөңгелегінің ішінде $(I - \lambda K)$ операторына шенелген кері оператор $(I - \lambda K)^{-1} = I + \lambda K + \lambda^2 K^2 + \dots + \lambda^n K^n + \dots$ формуласымен анықталады.

Шынында,

$$(I - \lambda K)(I - \lambda K)^{-1} = (I - \lambda K)(I + \lambda K + \lambda^2 K^2 + \dots) = I + \lambda K + \lambda^2 K^2 + \dots - \lambda K - \lambda^2 K^2 - \dots = I.$$

Енді

$$K_1(x, s) + \lambda K_2(x, s) + \lambda^2 K_3(x, s) + \dots + \lambda^{n-1} K_n(x, s) + \dots$$

функционалдық қатарын қарастырайық. Егер де $|\lambda| \leq \frac{1}{M(b-a)}$ болса, онда бұл қатар $D = \{a \leq x, s \leq b\}$ облысында бірқалыпты жинақты. Осы қатардың қосындысын

$$R(x, s; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x, s) \quad (23)$$

ядроның резольвентасы немесе шешетін ядросы деп атайды. Резольвента $R(x, s; \lambda)$ бірқалыпты жинақталатын функциялық қатардың қосындысы болғандықтан, x, s аргументтері бойынша үзіліссіз, ал λ аргументі бойынша $|\lambda| \leq \frac{1}{M(b-a)}$ облысында аналитикалық функция екені айқын. Егер (23) теңдігінің екі жағында $f(s)$ функциясына көбейтіп, s бойынша a мен b аралығында интеграл алсақ, онда

$$\int_a^b R(x, s; \lambda) f(s) ds = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} \int_a^b K_n(x, s) f(s) ds \quad (24)$$

теңдігін аламыз. Енді (22) мен (24) теңдіктерін салыстырсақ,

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, s; \lambda) f(s) ds \quad (25)$$

формуласы шығады. Егер бос мүше $f \in C[a, b]$ болса, онда (25) формуласымен анықталатын $\varphi \in C[a, b]$ Фредгольм теңдеуінің шешімін аламыз.

3-теорема. Егер алдыңғы теореманың шарттары орындалса, онда (20) теңдеуінің шешімі (25) формуласымен анықталады.

• **1-ескерту.** (25) формуласы λ параметрінің өте кіші (аз) мәндерінде ғана орындалатынын дәлелдедік, келешекте (25) формуласы λ параметрінің үлкен

мәндерінде орындалатыны көрсетіледі. (25) формуласы λ -ның кез келген мәндеріне орындалатындай ядролар да бар.

Мысалы, егер ядро өзіне-өзі ортогональ, яғни

$$\int_a^b K(x,s)K(s,x)ds = 0$$

болса, онда $K_2(x,s) = 0$, жалпы $K_n(x,s) = 0, \forall x,s$. Бұл жағдайда $R(x,s;\lambda) = K(x,s)$ λ -ға тәуелді емес.

- **2-ескерту.** Резольвента $R(x,s;\lambda)$ интегралдық теңдеулерді

$$R(x,s;\lambda) = K(x,s) + \lambda \int_a^b R(x,s;\lambda)K(t,x)dt$$

қанағаттандырады. Бұның дұрыстығын (21) мен (23) формулаларын пайдаланып, дәлелдеуге болады.

Мысалдар.

1. Фредгольмнің 2-текті интегралдық теңдеуі үшін $K(x,s) = e^x \sin s, 0 \leq x, s \leq \pi$ ядросының қайталанған ядроларын табу керек.

Шешуі. $K_1(x,s) = K(x,s) = e^x \sin s, K_2(x,s) = \int_0^\pi e^{x+t} \sin t \sin s dt = \frac{e^\pi + 1}{2} e^x \sin s,$

$$K_3(x,s) = \int_0^\pi K(x,t)K_2(t,s)dt = \frac{(e^\pi + 1)^2}{2} e^x \sin s, K_n(x,s) = \frac{(e^\pi + 1)^{n-1}}{2} e^x \sin s, \dots$$

2. Резольвентаны пайдаланып, мына интегралдық теңдеуді шешу керек:

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 x e^{-2s} \varphi(s) ds + e^x.$$

Шешуі. Алдымен ядросы $K(x,s) = x e^{-2s}$ резольвентасын табайық:

$$K_1(x,s) = K(x,s) = x e^{-2s}, K_2(x,s) = \int_0^1 x e^{-2t} t e^{-2s} dt = \frac{1}{4} (1 - 3e^{-2}) x e^{-2s},$$

$$K_3(x,s) = \int_0^1 x e^{-2t} \frac{1}{4} (1 - 3e^{-2}) t e^{-2s} dt = \left(\frac{1 - 3e^{-2}}{4} \right)^2 x e^{-2s},$$

$$K_n(x,s) = \left(\frac{1 - 3e^{-2}}{4} \right)^{n-1} x e^{-2s}, \dots$$

Олай болса,

$$R(x,s;\lambda) = x e^{-2s} \left(1 + \lambda \frac{1 - 3e^{-2}}{4} + \lambda^2 \left(\frac{1 - 3e^{-2}}{4} \right)^2 + \dots + \lambda^{n-1} \left(\frac{1 - 3e^{-2}}{4} \right)^{n-1} + \dots \right).$$

$$\text{Енді } |\lambda| \cdot \left| \frac{1-3e^{-2}}{4} \right| < 1 \text{ немесе } |\lambda| < \frac{4e^2}{e^2-3} \text{ болса, онда } R(x,s;\lambda) = \frac{xe^{-2s}}{1-\lambda \frac{1-3e^{-2}}{4}}.$$

Демек, берілген интегралдық теңдеудің шешімі

$$\varphi(x) = e^x - \frac{\lambda x}{1-\lambda \frac{1-3e^{-2}}{4}} \int_0^1 e^{-s} \varphi(s) ds.$$

3. Енді (20) теңдеуді $L_2[a,b]$ кеңістігінде қарастырайық. Біз $L_2[a,b]$ кеңістігінің метрикасын

$$\rho_{L_2}(\varphi_1, \varphi_2) = \left(\int_a^b |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

формуласы мен анықталатынын білеміз. $L_2[a,b]$ кеңістігінде $C[a,b]$ -ға қарағанда параметр λ -ның үлкен мәндерінде шешімнің бар екенін көрсетуге болады.

2-лемма. Егер ядро $K(x,s) \in C(D)$ болса, онда K операторы

$$\forall \varphi(t) \in L_2[a,b] \xrightarrow{K} \psi(x) \equiv K\varphi \in C[a,b].$$

Дәлелдеуі. $x_0 \in [a,b]$ нүктесі берілсін. $K(x,s)$ ядросы үзіліссіз функция болғандықтан кез келген $\varepsilon > 0$ саны үшін сәйкес $\delta > 0$ саны табылып:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |K(x,s) - K(x_0,s)| < \frac{\varepsilon}{c}, \quad \forall s \in [a,b].$$

Сондықтан, Коши-Буняковский теңсіздігін

$$\begin{aligned} |\psi(x) - \psi(x_0)| &= \left| \int_a^b [K(x,s) - K(x_0,s)] \varphi(s) ds \right| \leq \frac{\varepsilon}{c} \int_a^b |\varphi(s)| ds \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{c} \sqrt{b-a} \left(\int_a^b |\varphi(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon, \end{aligned}$$

яғни $\psi(x)$ функциясы x_0 нүктесінде үзіліссіз. x_0 кез келген нүкте болғандықтан $\psi(x)$ функциясы $[a,b]$ -да үзіліссіз. Осыдан, егер $f \in C[a,b]$ және $K(x,s) \in C[a,b]$ болса, (20) теңдеуінің оң жағы кез келген $\varphi \in L_2[a,b]$ үшін, үзіліссіз функция екені шығады. Яғни сол жағында тұрған: $\varphi \in C[a,b]$ Демек, $L_2[a,b]$ кеңістігінде жататын функциялар ішінен тек үзіліссіз функциялар ғана шешім болады деген қорытынды шығады. Дәлелдеген лемма бойынша

$$L_2[a,b] \xrightarrow{K} C[a,b] \subset L_2[a,b].$$

3-лемма. Егер

$$B = \left(\int_a^b \int_a^b K^2(x, s) ds dx \right)^{\frac{1}{2}} = \|K\|$$

деп белгілесек, онда K операторы параметрдің $|\lambda| < \frac{1}{B}$ мәндерінде қысу операторы болады. Шынында да,

$$K\varphi_1 - K\varphi_2 = \lambda \int_a^b K(x, s)[\varphi_1(s) - \varphi_2(s)] ds$$

болғандықтан, Коши-Буняковский теңсіздігін пайдаланып

$$|K\varphi_1 - K\varphi_2|^2 \leq \lambda^2 \int_a^b K^2(x, s) ds \int_a^b [\varphi_1(s) - \varphi_2(s)]^2 ds$$

теңсіздігін аламыз. Енді осы соңғы алынған теңсіздіктің екі жағында x бойынша a мен b аралығында интегралдасақ

$$\int_a^b |K\varphi_1 - K\varphi_2|^2 dx \leq \lambda^2 \int_a^b \int_a^b K^2(x, s) ds dx \int_a^b |\varphi_1(s) - \varphi_2(s)|^2 ds$$

немесе

$$\rho_{L_2}^2(K\varphi_1, K\varphi_2) \leq \lambda^2 B^2 \rho_{L_2}^2(\varphi_1, \varphi_2)$$

теңсіздігі шығады. Осыдан

$$\rho_{L_2}(K\varphi_1, K\varphi_2) \leq |\lambda| \cdot B \cdot \rho_{L_2}(\varphi_1, \varphi_2) \quad (26)$$

(26) теңсіздігінен B оператор $|\lambda| \cdot B < 1$ болғанда ғана қысу операторы болады.

Қысып – бейнелеу принципінен (20) теңдеуінің жалғыз ғана шешімі болуы үшін теңсіздігі $|\lambda| < \frac{1}{B}$ орындалуы керек. Расында $B \leq M(b-a)$ болғандықтан $|\lambda| < \frac{1}{B}$ облысының $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$ облысынан кең екені шығады. Бірақ $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$ облысында жуықтайтын тізбек интегралдық теңдеудің шешіміне бірқалыпты жинақты да, ал $\frac{1}{M(b-a)} < |\lambda| < \frac{1}{B}$ облысында бұл тізбек орташа жинақталатынын айтуға болады.

4. $K(x, s) \in L_2(D)$ болсын. Сонда келесі тұжырым орынды.

4-лемма. Егер $K\varphi = \int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds$ интегралындағы $\varphi(x) \in L_2[a,b]$ болса, онда ол интеграл (a,b) интервалының барлық нүктелерінде дерлік бар және $K\varphi \in L_2(a,b)$ болады.

Дәлелдеуі. $|K(x,s)\varphi(s)| \leq 0,5K^2(x,s) + 0,5\varphi^2(s)$ теңсіздігі әрқашан орынды. (26) теңсіздігінің оң жағының бірінші қосылғышы s айнымалысы бойынша барлық $x \in [a,b]$ үшін дерлік, ал екінші қосылғыш $[a,b]$ кесіндісінде s бойынша интегралданады. Міне бұдан $K(x,s)\varphi(s)$ функциясы барлық $x \in [a,b]$ үшін дерлік s айнымалысы бойынша интегралданады, яғни $\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds$ интегралы барлық жағдайда дерлік анықталған. Коши–Буняковский теңсіздігі бойынша

$$|K\varphi|^2 \leq \int_a^b |K(x,s)|^2 ds \int_a^b |\varphi(s)|^2 ds = \|\varphi\|^2 \int_a^b |K(x,s)|^2 ds$$

өрнек орынды, ал бұдан

$$\int_a^b |K\varphi|^2 dx \leq \|\varphi\|^2 \int_a^b \int_a^b |K(x,s)|^2 ds dx < \infty,$$

яғни $K\varphi(x) \in L_2(a,b)$ екені шығады. Демек, лемма дәлелденді, яғни

$$\|K\varphi\|_{L_2(a,b)} \leq B\|\varphi\|_{L_2(a,b)}. \quad (27)$$

5-лемма. Фредгольмдік операторлардың көбейтіндісі де фредгольмдік оператор болады.

Дәлелдеуі. $K(x,s), N(x,s) \in L_2(D)$ болсын. Бұлардан:

$$NK\varphi = \int_a^b N(x,s) \left(\int_a^b K(s,t)\varphi(t)dt \right) ds.$$

Әрине, бұл өрнектің оң жағындағы $\varphi(t) \in L_2[a,b]$ болса, онда теңдіктегі қайталанған интегралдар анықталады. Олай болса, Фубини теоремасы бойынша

$$NK\varphi = \int_a^b \varphi(t) dt \int_a^b N(x,s)K(s,t)ds = \int_a^b \left\{ \int_a^b N(x,t)K(t,s)dt \right\} \varphi(s)ds.$$

Егер $M(x,s) = \int_a^b N(x,t)K(t,s)dt$ деп белгілесек, онда:

$$NK\varphi = \int_a^b M(x,s)\varphi(s)ds. \quad (28)$$

Енді $M(x,s) \in L_2(D)$ екенін көрсетейік. Коши–Буняковский теңсіздігі бойынша

$$|M(x,s)|^2 \leq \int_a^b |N(x,t)|^2 dt \int_a^b |K(t,s)|^2 dt$$

теңсіздігі орынды. Бұл теңсіздіктің екі жағын D төртбұрышы бойынша интегралдап,

$$\int_a^b \int_a^b |M(x,s)|^2 dx ds \leq \int_a^b \int_a^b |N(x,t)|^2 dt dx \int_a^b \int_a^b |K(t,s)|^2 dt ds \leq BB^2, \quad (29)$$

демек, $M(x,s) \in L_2(D)$. Олай болса, NK операторы фредгольмдік оператор болады.

3-ескерту. Жалпы жағдайда фредгольмдік операторларды көбейту амалында орын ауыстыру заңы әрқашан орынды бола бермейді.

Мәселен, $K(x,s) = 1$, $N(x,s) = x - s$, $a = 0$, $b = 1$ болсын. Сонда

$$NK\varphi = \int_0^1 (x - \frac{1}{2})\varphi(s)ds, \quad KN\varphi = \int_0^1 (\frac{1}{2} - S)\varphi(s)ds.$$

4-ескерту. Егер $K(x,s)$, $N(x,s) \in L_2(D)$ болса, онда (28) өрнегіндегі $M(x,s) \in L_2(D)$ болады. Расында, егер

$$B_n^2 = \int_a^b \int_a^b |K_n(x,s)|^2 dx ds$$

деп белгілесек (мұндағы, $K_n(x,s)$ - n - қайталанған ядро), онда

$$K_n(x,s) = \int_a^b K_{n-1}(x,t)K(t,s)dt.$$

Жоғарыдағы (29) теңсіздігін $N(x,s) = K_{n-1}(x,s)$ үшін пайдалансақ: $B_n^2 \leq B^2 B_{n-1}^2$, ал бұдан $B_n^2 \leq B^4 B_{n-2}^2 \leq \dots \leq B^{2n}$ немесе $B_n \leq B^n$. Сондықтан (27) теңсіздігін ескеріп,

$$\|K^n \varphi\|_{L_2} \leq B_n \|\varphi\|_{L_2} \leq B^n \|\varphi\|_{L_2} \quad (30)$$

шартын аламыз.

Егер $K(x,s) \in L_2(D)$ шарты орындалса, онда 4 ескерту бойынша ол ядроның қайталанған ядросы да сол шартты қанағаттандырады.

Егер

$$A_n = \sup_x \int_a^b |K_n(x, s)|^2 ds$$

деп белгілесек, онда

$$\int_a^b |K_n(x, s)|^2 ds \leq \int_a^b \left\{ \int_a^b K_{n-1}(x, t) K(t, s) \right\}^2 ds \leq B_n^2.$$

Ал $\int_a^b |K_{n-1}(x, s)|^2 ds \leq A_{n-1}$ болғандықтан соңғы теңсіздіктен

$$A_n \leq B^2 A_{n-1} \leq \dots \leq AB^{2n-2} \quad \text{және} \quad \int_a^b |K_n(x, s)|^2 ds \leq AB^{2n-2} \quad (31)$$

теңсіздігі шығады.

4-теорема. Егер

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds + f(x)$$

Фредгольм теңдеуіндегі $K(x, s) \in L_2(D)$ және $|\lambda| < \frac{1}{B}$ болса, онда ол теңдеу үшін түзілген Нейман қатары теңдеудің шешіміне $\varphi(x) \in L_2(a, b)$ орташа жинақты.

Дәлелдеуі. $\sum_{m=n+1}^{n+p} \lambda^m K^m f$ қатар үшін үшбұрыштар теңсіздігі мен жоғарыдағы (30) өрнегін пайдаланып, мынаны аламыз:

$$\left\| \sum_{m=n+1}^{n+p} \lambda^m K^m f \right\| \leq \sum_{m=n+1}^{n+p} |\lambda|^m \|K^m f\| \leq \|f\| \sum_{m=n+1}^{n+p} (|\lambda| B)^m \leq \|f\| \sum_{m=n+1}^{\infty} (|\lambda| B)^m = \|f\| \frac{(|\lambda| B)^{n+1}}{1 - |\lambda| B}.$$

Егер n саны жеткілікті дәрежеде үлкен болса, онда теңсіздіктің оң жағы өте аз шама болады. Демек қалдық мүшесі $\sum_{m=n+1}^{n+p} \lambda^m K^m f$ болған қатар жинақты, олай болса, жоғарыдағы Фредгольм теңдеуі үшін алынған Нейман қатары интегралданатын $\varphi(x)$ функциясына жинақты. Сонымен $\|\varphi_n - \varphi\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Енді шектік функция $\varphi(x)$ Фредгольм теңдеуін қанағаттандыратынын көрсетейік. Ол үшін $K\varphi_{n-1} \rightarrow K\varphi, n \rightarrow \infty$ екенін, яғни орташа жинақты екенін көрсетсек жеткілікті. Бұл оңай дәлелденеді, себебі $n \rightarrow \infty$ жағдайда

$$\|K\varphi_{n-1} - K\varphi\| \leq \|K(\varphi_{n-1} - \varphi)\| \leq B\|\varphi_{n-1} - \varphi\| \rightarrow 0.$$

5-теорема. Егер $K(x, s) \in L_2(D)$ шартына қосымша $|K(x, s)| \leq M$ шарты да орындалса, онда Нейман қатары $[a, b]$ кесіндіде бірқалыпты жинақты болады.

Дәлелдеуі. Нейман қатарының жалпы мүшесін бағалайық:

$$|\lambda^m K^m \varphi| = |\lambda|^m \int_a^b |K_m(x, s) f(s) ds| \leq |\lambda|^m \|f\| \left\{ \int_a^b |K_m(x, s)|^2 ds \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Егер (31) теңсіздігін пайдалансақ,

$$|\lambda^m K^m \varphi| \leq \frac{\sqrt{A}}{B} \|f\| (|\lambda| B)^m$$

теңсіздігі шығады, оның оң жағында еселігі $|\lambda| B < 1$ болатын геометриялық прогрессияның жалпы мүшесі. Вейерштрасс теоремасы бойынша: жалпы мүшесі осындай қасиетке ие қатар, бірқалыпты жинақты. Теорема дәлелденді.

5. Енді көпөлшемді интегралдық теңдеулерге жоғарыдағы келтірілген теорияларды қолданайық. Көпөлшемді Фредгольм теңдеуіне де қысып бейнелеу әдісі орынды.

$$\varphi(x) = \lambda \int_D K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi \pm f(x) \quad (32)$$

теңдеуінде D шенелген немесе R^n -дегі шенелмеген облыс, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ ал оның ядросы $K(x, s)$ $D \times D$ облысында үзіліссіз немесе $K(x, \xi) \in L_2(D \times D)$, яғни

$$\iint_{D \times D} |K(x, \xi)|^2 d\xi dx = B^2 = \text{const} < \infty$$

болсын. Жоғарыдағы шенелгендік шарты көпаргументті функция үшін

$$\int_D |K(x, \xi)|^2 d\xi < A = \text{const}$$

түрінде жазылады. (32) теңдеудің ядросы соңғы екі шарттарды қанағаттан-дырса, теңдеу үшін жоғарыдағы тұжырымдар орынды екенін дәлелдеу қиын емес.

Егер $|\lambda| < \frac{1}{B}$ болса, онда (32) теңдеу біртіндеп жуықтау әдісімен шешіледі және оның шешімі жалғыз болады. Бұл әдістегі қайталанушы ядролар

$$K_1(x, s) = K(x, s), \quad K_2(x, s) = \int_D K_1(x, \eta) K(\eta, s) d\eta, \dots, \quad K_n(x, s) = \int_D K_{n-1}(x, \eta) K(\eta, s) d\eta$$

өрнектермен анықталады да теңдеудің шешімі

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_D R(x, \xi; \lambda) f(\xi) d\xi$$

түрінде табылады, мұндағы, $R(x, \xi, \lambda) K(x, \xi)$ ядросының резольвентасы:

$$R(x, \xi; \lambda) = K_1(x, \xi) + \lambda K_2(x, \xi) + \dots + \lambda^{n-1} K_n(x, \xi) + \dots$$

Егер $K(x, \xi) \in C(D \times D)$, D – шектелген облыс болса, бұл қатар $|\lambda| < \frac{1}{MD}$ болғанда бірқалыпты жинақты, ал $R(x, \xi, \lambda)$ үзіліссіз функциялық қатардың шегі ретінде үзіліссіз функция.

6. *Интегралдық теңдеулер жүйесі.* Фредгольмнің 2-текті интегралдық теңдеулері жүйесі

$$\varphi_i(x) = \lambda \sum_{j=1}^m \int_a^b K_{ij}(x, s) \varphi_j(s) ds + f_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (33)$$

түрінде болады. Бұл жүйенің ядролары $K_{ij}(x, s) \in L_2(D)$, ал бос мүшелері $f_i \in L_2(a, b)$ болсын. Осы жүйенің шешімі болатын $\varphi_i(x)$ функциялары $L_2(a, b)$ кеңістігінен ізделеді. Бұл теңдеулер жүйесі үшін жоғарыдағы тұжырымдар толық түрде орынды. Ал $|\lambda| < \frac{1}{B}$ теңсіздігіндегі B үшін:

$$B^2 = \sum_{ij=1}^m \int_a^b \int_a^b |K_{ij}(x, s)|^2 dx ds$$

және $K_{ij}(x, s)$ ядролары үшін

$$\int_a^b |K_{ij}(x, s)|^2 ds \leq A_{ij} = \text{const}$$

шарттар орындалса, онда (33) жүйе біртіндеп жуықтау әдісі арқылы шешіледі. Ол жуықтап шешу үдерісі бірқалыпты жинақты. Бұған біз толық тоқталмаймыз, себебі жүйені Фредгольмнің 2-текті бір теңдеуіне келтіруге болады. Бірақ ол теңдеу тек бір интеграл үшін емес, одан m есе кең облыста қарастырылады.

$a < x \leq a + m(b - a)$ аралығында $\Phi(x)$ пен $F(x)$ функцияларын

$$a + (i - 1)(b - a) \leq x \leq a + i(b - a)$$

болғанда

$$\Phi(x) = \varphi_i(x - (i - 1)(b - a)), \quad F(x) = f_i(x - (i - 1)(b - a)), \quad i = 1, 2, \dots, m$$

түрінде анықтап, ал $K(x, s)$ ядросын $Q_m = \{a \leq x, s \leq a + m(b - a)\}$ облысында $a + (i - 1)(b - a) \leq x \leq a + i(b - a); a + (j - 1)(b - a) \leq s \leq a + j(b - a);$ болғанда

$$K(x, s) = K_{ij}(x - (i - 1)(b - a), s - (j - 1)(b - a)), \quad i, j = 1, 2, \dots, m$$

арқылы өрнектеп, (33) теңдеулер жүйесін

$$\Phi(x) = \lambda \int_a^{a+b(b-a)} K(x,s)\Phi(s)ds + F(x)$$

жазсақ, онда біз құрған $K(x,s)$ ядросы Q_m – де интегралданады, ал $F(x) \in L_2(a, a + m(b-a))$ болады. Шынында да,

$$\begin{aligned} \int_a^{a+m(b-a)} |F(x)|^2 dx &= \sum_{i=1}^m \int_a^{a+i(b-a)} |F(x)|^2 dx = \sum_{i=1}^m \int_a^{a+i(b-a)} |f_i(x - (i-1)(b-a))|^2 dx = \\ &= \sum_{i=1}^m \int_a^b |f_i(x)|^2 dx < \infty. \end{aligned}$$

$$\text{Дәл осылай, } \int_a^{a+ma} \int_a^{a+m(b-a)} |K(x,s)|^2 ds dx = \sum_{i,j=1}^m \int_a^{a+i(b-a)} \int_a^{a+j(b-a)} |K_{ij}(x,s)|^2 ds dx = B^2 < \infty.$$

§3.3. Қысып бейнелеу әдісін Вольтерра теңдеуіне және сызықтық емес интегралдық теңдеулерге қолдану

1. Вольтерраның

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x,s)\varphi(s)ds + f(x) \quad (34)$$

теңдеуін қарастырайық. Біз жоғарыда Вольтерра теңдеуі Фредгольм теңдеуінің дербес түрі болғандықтан $K(x,s)$ ядросын $s > x$ болғанда $K(x,s) = 0$ деп анықтап, Фредгольм теңдеуіне келтіруге болатынын айтқан-быз. Бірақ Вольтерра теңдеуі үшін қысып бейнелеу әдісі параметр λ -ның барлық мәндері үшін орынды. Сондықтан Вольтерра теңдеуіне арнайы тоқталамыз.

6-теорема. K операторы толық метрикалық X кеңістігін өзіне үзіліссіз бейнелесін және $H = H^n$ операторы n -нің кейбір мәндерінде қысу операторы болсын. Бұл жағдайда $Kx = x$ теңдеуінің жалғыз ғана шешімі бар болады.

Расында, x_0 нүктесі H операторының қозғалмайтын нүктесі, яғни $x = Hx$ теңдеуін қанағаттандырса, онда $Kx = K(H^k x) = H^k Kx = H^k x_0 \rightarrow x$, $k \rightarrow \infty$ болады, себебі H операторының қозғалмайтын x нүктесіне жинақты. Демек $Kx = x$ қозғалмайтын нүкте ол жалғыз. Себебі K операторының қозғалмайтын нүктесі K^n қысу операторының да қозғалмайтын нүктесі. Егер $K(x,s)$ пен $f(x)$ үзіліссіз функциялар болса, онда:

$$K\varphi = \lambda \int_a^x K(x,s)\varphi(s)ds + f(x)$$

операторы $C[a,b]$ кеңістігін қайтадан $C[a,b]$ -ға үзіліссіз бейнелейтінін көрсету оңай.

$$M = \max_{x,s} |K(x,s)|, \quad a \leq x \leq b, \quad a \leq s \leq x$$

деп белгілейік. Сонда:

$$\begin{aligned} |K\varphi_2 - K\varphi_1| &= \left| \lambda \int_a^x K(x,s) [\varphi_2(s) - \varphi_1(s)] ds \right| \leq |\lambda| M(b-a) \rho(\varphi_1, \varphi_2), \\ |K^2\varphi_2 - K^2\varphi_1| &= \left| \lambda \int_a^x K(x,s) [K\varphi_2 - K\varphi_1] ds \right| \leq \\ &\leq \frac{\lambda^2}{2!} \cdot M^2(x-a)^2 \rho(\varphi_2, \varphi_1) \end{aligned}$$

және жалпы жағдайда

$$|K^n\varphi_2 - K^n\varphi_1| \leq |\lambda|^n \frac{M^n(x-a)^n}{n!} \rho(\varphi_2, \varphi_1).$$

$$\text{Сонымен } \rho(K^n\varphi_2, K^n\varphi_1) \leq \frac{|\lambda|^n M^n(b-a)^n}{n!} \rho(\varphi_2, \varphi_1).$$

Міне, бұдан K операторы мен оның K^n дәрежесі операторлары элементтерді $C[a,b]$ -дан $C[a,b]$ -ға сәйкестендіруші үзіліссіз операторлар екенін көреміз. Оның үстіне соңғы теңсіздіктегі λ сәйкес n санын $|\lambda|^n M^n(b-a)^n < 1$ теңсіздігін қанағаттандыратындай етіп таңдап алуға болады. Демек, K^n операторы үшін жеткілікті дәрежедегі n үшін қысу операторы болады.

Осы дәлелденген теоремадан K операторының жалғыз ғана қозғал-майтын нүктесі бар болатынын білеміз. Демек, (34) Вольтерраның интегралдық теңдеуінің кез келген λ саны үшін жалғыз шешімі бар болады. Ол

$$\varphi_{n+1}(x) = \lambda \int_a^x K(x,s) \varphi_n(s) ds + f(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

тізбегінен біртіндеп жуықтау әдісімен табылады. Бұл әдістегі нөлдік жуықтау үшін $C[a,b]$ жататын кез келген функцияны алуға болады. Егер $\varphi_0(x) = f(x)$ деп алсақ, онда алдыңғы теңдіктен

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= f(x) + \lambda \int_a^x K(x,s) f(s) ds = (I + \lambda K) f, \quad \varphi_2(x) = (I + \lambda K)^2 f = I + \lambda K f + \lambda^2 K^2 f, \dots, \\ \varphi_n(x) &= (I + \lambda K)^n f = I + \lambda K f + \lambda^2 K^2 f + \dots \end{aligned}$$

K операторының дәрежесін қайталанатын ядролар арқылы анықтайық:

$$\begin{aligned} K^2 f &= K(Kf) = \int_a^x K(x,t) \left(\int_a^t K(t,s) f(s) ds \right) dt = \\ &= \int_a^x f(s) \left\{ \int_s^x K(x,s) K(t,s) dt \right\} ds = \int_a^x K_2(x,s) f(s) ds, \end{aligned}$$

мұндағы, $K_2(x,s) = \int_a^x K(x,t)K(t,s)dt$. Жалпы жағдайда, $K^n f = \int_a^b K_n(x,s)f(s)ds$,

мұндағы, $K_n(x,s) = \int_a^x K(x,t)K_{n-1}(t,s)dt$.

Енді $K_1(x,s) = K(x,s)$ деп алып,

$$K_1(x,s) + \lambda K_2(x,s) + \dots + \lambda^{n-1} K_n(x,s) + \dots$$

түзілген қатарды қарастырайық. $M = \max_{x,s} |K(x,s)|$ екенін ескертіп,

$$|K_2(x,s)| \leq \int_s^x |K(x,t)K_1(t,s)|ds \leq M^2(x-s),$$

$$|K_3(x,s)| \leq \frac{M^3(x-s)^2}{2!}, \dots, |K_n(x,s)| \leq \frac{M^n(x-s)^{n-1}}{(n-1)!}, \dots$$

теңсіздіктерін аламыз. Бұл алынған теңсіздіктерден қатар λ санының кез келген мәнінде бірқалыпты жинақты, оның қосындысы x,s аргументтері бойынша үзіліссіз функция екенін көреміз. Қатардың қосындысы $R(x,s;\lambda)$ деп белгілесек, $R(x,s;\lambda) = K_1(x,s) + \lambda K_2(x,s) + \dots + \lambda^{n-1} K_n(x,s) + \dots$ өрнегін Вольтерра теңдеуі ядросының резольвентасы деп атаймыз.

Жоғарыдағы K^n үшін алынған өрнектерді пайдаланып, $\varphi_n(x)$ функцияларын

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &= f(x) + \lambda Kf + \lambda^2 K^2 f + \dots + \lambda^n K^n f = \\ &= f(x) + \lambda \int_a^x [K_1(x,s) + \lambda K_2(x,s) + \dots + \lambda^{n-1} K_n(x,s)] f(s)ds, \quad n=1,2,\dots \end{aligned}$$

түрінде жазамыз. Бұл өрнектен $n \rightarrow \infty$ болғанда шекке көшіп,

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x R(x,s;\lambda) f(s)ds \quad (35)$$

интегралдық теңдеудің шешімін аламыз.

Мысал. Біртіндеп жуықтау әдісімен мына Вольтерраның 2-текті

$$\varphi(x) = 3 \int_0^x (x-s)\varphi(s)ds + x - x^3$$

интегралдық теңдеуінің шешімін табайық.

Шешуі. Бастапқы жуық шешімін $\varphi_0(x) = x - x^3$ деп алсақ, онда

$$\varphi_1(x) = x - 3 \cdot \frac{3!}{5!} x^5, \varphi_2(x) = x - 3^2 \cdot \frac{3!}{7!} x^7, \dots, \varphi_n(x) = x - 3^n \cdot \frac{3!}{(2n+3)!} x^{2n+3}, \dots,$$

яғни шешім түрі

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = x - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n n!}{(2n+3)!} x^{2n+3} = x$$

болады.

7-теорема. Егер $K(x,s) \in C(D)$ және $f(x) \in C[a,b]$ болса, онда Вольтерра теңдеуінің кез келген λ үшін (35) түріндегі бір ғана шешімі бар болады.

$\bar{R}(x,s;\lambda)$ резольвентасы мына $\bar{R}(x,s;\lambda) = K(x,s) + \lambda \int_s^x K(x,t) \bar{R}(t,s;\lambda) dt$ интегралдық теңдеуін қанағаттандырады. Расында,

$$\begin{aligned} \bar{R}(x,s;\lambda) &= K(x,s) + \lambda K_2(x,s) + \dots + \lambda^{n-1} K_n(x,s) + \dots = \\ &= K(x,s) + \lambda \int_s^x K(x,t) [K_1(t,s) + \lambda K_2(t,s) + \dots] dt = K(x,s) + \lambda \int_s^x K(x,t) \bar{R}(t,s;\lambda) dt. \end{aligned}$$

Біз $K(x,s)$ пен $f(x)$ функциялары өз аргументтері бойынша үзіліссіз функциялар деп ұйғарып, (34) интегралдық теңдеуінің жалғыз ғана шешімі бар екенін көрсетейік. Әрине K мен f функцияларына қойылатын шарттарды жеңілдетуге болады.

8-теорема. Ядро $K(x,s) \in L_2(D)$ және $f(x) \in L_2[a,b]$ болсын. Онда (34) интегралдық теңдеуінің кез келген λ үшін бір ғана $\varphi(x) \in L_2[a,b]$ шешімі бар болады. Ол шешім (35) өрнегімен анықталады.

Бұл тұжырым алдыңғы теорема секілді дәлелденеді. Ал мұндағы $R(x,s;\lambda)$ резольвентасы λ бойынша бүтін функция ретінде

$$R(x,s;\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(x,s).$$

$D = \{a \leq x, s \leq b\}$ облысының барлық нүктелерінде дерлік жинақталатын қатардың қосындысы болады.

1-мысал. Вольтерраның 2-текті теңдеуі үшін $K(x,t) = \frac{1 + \cos 2x}{\cos^2 s}$ ядро-сының резольвентасын табайық.

Резольвентаны табу үшін алдымен қайталанған ядроларды есептейік:

$$\begin{aligned} K_1(s,x) &= K(s,x) = \frac{1 + \cos 2x}{\cos^2 s}, \quad K_2(x,s) = \int_s^x K(x,t) K_1(t,s) dt = \frac{2(x-s)}{1!} \cdot \frac{1 + \cos 2x}{\cos^2 s}, \\ K_3(x,s) &= \int_s^x K(x,t) K_2(t,s) dt = 2^2 \cdot \frac{(x-s)^2}{2!} \cdot \frac{1 + \cos 2x}{\cos^2 s}, \dots, \\ K_n(x,s) &= 2^{n-1} \cdot \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \frac{1 + \cos 2x}{\cos^2 s}, \dots \end{aligned}$$

Демек, резольвента формуласы бойынша

$$R(x,s;\lambda) = \frac{1 + \cos 2x}{\cos^2 s} \left[1 + \lambda \cdot \frac{2(x-s)}{1!} + \lambda^2 \cdot \frac{2^2(x-s)^2}{2!} + \dots + \lambda^{n-1} \cdot \frac{2^{n-1}(x-s)^{n-1}}{(n-1)!} + \dots \right] =$$

$$= \frac{1 + \cos 2x}{\cos^2 s} \cdot e^{2\lambda(x-s)}.$$

2-мысал. Резольвентаны пайдаланып

$$\varphi(x) = e^{5x} + 3 \int_0^x e^{2(x-t)} \varphi(t) dt$$

интегралдық теңдеуін шешейік.

Шешуі. Алдымен бұл теңдеу үшін қайталанған ядроларды табамыз:

$$K_1(x,s) = K(x,s) = e^{2(x-s)}, \quad K_2(x-s) = \int_s^x e^{2(x-t)} e^{2(t-s)} dt = e^{2(x-s)} \frac{(x-s)}{1!},$$

$$K_3(x,s) = e^{2(x-s)} \frac{(x-s)^2}{2!}, \dots, K_n(x,s) = e^{2(x-s)} \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!}, \dots$$

Демек,

$$R(x,s;\lambda) = e^{2(x-s)} \left[1 + 3 \frac{(x-s)}{1!} + 3^2 \frac{(x-s)^2}{2!} + \dots + 3^{n-1} \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!} \right] = e^{5(x-s)}.$$

Енді (35) формуласын пайдалансақ, берілген теңдеудің шешімі

$$\varphi(x) = e^{5x} + 3 \int_0^x e^{5(x-s)} e^{5s} ds = (1 + 3x) e^{5x}.$$

- **Ескерту.** 7-теоремадан біртекті интегралдық

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x,s) \varphi(s) ds$$

теңдеуінің барлық λ үшін тек қана $\varphi(x) = 0$ шешімі бар болады.

1. Вольтерра типіндегі интегралдық теңдеулердің

$$\varphi_i(x) = f_i(x) + \lambda \sum_{j=1}^n \int_a^x K_{ij}(x,s) \varphi_j(s) ds, \quad i=1,2,\dots,m$$

жүйесіне қысып бейнелеу әдісін қолдануға болады. Бұл жүйенің біртіндеп жуықтау арқылы алынған шешімі кез келген λ мен $x \in [a,b]$ мәндерінде жинақты. Егер $K_{ij}(x,s) \in C(D)$ және $f_i(x) \in C[a,b]$ болса, онда жүйенің шешімдері $\varphi_i(x) \in C[a,b]$ болады.

Жоғарыдағы біртіндеп жуықтау әдісі көп аргументті функциялардың интегралдық теңдеулері үшін де қолданылады. Мәселен, екі аргументті функция үшін

$$\varphi(x, y) = f(x, y) + \lambda \int_a^x \int_c^y K(x, y; s, t) \varphi(s, t) ds dt$$

интегралдық теңдеуіне айтылған әдісті қолдануға болады. Ал λ параметрі бойынша жіктеліп, ол λ -ның кез келген мәнінде жинақты болатын жоғарыдағы жағдай тек осы интегралдық теңдеуді шешуде емес, одан күрделі, мәселен, теңдеудің оң жағында тек екі еселі екі одан басқа бірөлшемді интегралдар да бар интегралдық теңдеуге, мысалы,

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = & f(x, y) + \lambda \int_a^x K_1(x, y; s) \varphi(y, s) ds + \\ & + \lambda \int_c^y K_2(x, y; s) \varphi(x, s) ds + \lambda^2 \int_a^x \int_c^y K_3(x, y; s, t) \varphi(s, t) ds dt \end{aligned}$$

типте теңдеуге қолдануға болады

Дәл осылай, жоғарыда айтылған әдіспен

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{\omega(x)}^x K(x, t) \varphi(t) dt$$

және

$$\varphi(x, y) = f(x, y) + \lambda \int_{\omega_1(x)}^x \int_{\omega_2(y)}^y K(x, y; s, t) \varphi(s, t) ds dt$$

интегралдық теңдеулерінің шешілетінін және олардың жалғыз шешімі бар екенін дәлелдеуге болады. Мұнда, $a \leq \omega_1(x) \leq x$ және $c \leq \omega_2(y) \leq y$.

2. *Сызықтық емес интегралдық теңдеулер.* Мына түрдегі сызықтық емес фредгольмдік

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, s; \varphi(s)) ds + f(x) \quad (36)$$

теңдеуін қарастыралық, мұндағы $K(x, s; z)$ функциясы $a \leq x, s < b$, $-\infty < z < \infty$ облысында үзіліссіз және $f(x) \in C[a, b]$. Бұл шарттарға қосымша $K(x, s; z)$ функциясы үшінші аргументі бойынша Липшиц шартын: $|K(x, s; z_1) - K(x, s; z_2)| \leq N|z_1 - z_2|$ қанағаттандырсын (N тұрақты сан).

$$K\varphi = \lambda \int_a^b K(x, s; \varphi(s)) ds + f(x)$$

деп белгілейік. K оператор толық метрикалық кеңістік $C[a, b]$ -ны қайтадан өзіне бейнелейді. $\varphi_1(x)$ мен $\varphi_2(x)$ функциялар $C[a, b]$ кеңістігінен болсын. Олай болса,

$$|K\varphi_2 - K\varphi_1| = \left| \lambda \int_a^b K(x,s;\varphi_2) - K(x,s;\varphi_1) ds \right| \leq |\lambda| N |b-a| \max_{a \leq s \leq b} |\varphi_2(s) - \varphi_1(s)|$$

немесе $\rho(K\varphi_2, K\varphi_1) \leq |\lambda| N |b-a| \rho(\varphi_2, \varphi_1)$ теңсіздігі орынды. Демек, егер $|\lambda| < \frac{1}{N|b-a|}$ болса, онда K қысу операторы болады. Олай болса, жоғарыдағы

Банах теоремасы бойынша (36) түріндегі интегралдық теңдеудің $|\lambda| < \frac{1}{N|b-a|}$ мәндерінде бір ғана үзіліссіз шешімі болады. Ол шешім жоғарыдағыдай біртіндеп жуықтау әдісімен

$$\varphi_{n+1}(x) = \lambda \int_a^b K(x,s;\varphi_n(s)) ds + f(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

анықталады, мұндағы $\varphi_0(x)$ шешім функциясын $C[a, b]$ кеңістігінен қалаған түрде алуға болады.

Вольтерраның 2-текті сызықтық емес интегралдық теңдеуін

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x,s;\varphi(s)) ds + f(x) \quad (37)$$

қарастыралық. $\varphi_0(x)$ ретінде $[a, b]$ кесіндіде анықталған кез келген үзіліссіз функцияны алайық. $\varphi_0(x)$ функциясын (37) теңдеудің оң жағына қойып және

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,s;\varphi_0(s)) ds$$

деп белгілеп, одан кейін

$$\varphi_2(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,s;\varphi_1(s)) ds$$

өрнегін түземіз; дәл осылай, жалпы түрде

$$\varphi_{n+1}(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,s;\varphi_n(s)) ds, \dots, (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Демек, біз $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ түріндегі үзіліссіз функциялардың ақырсыз тізбегін алдық. Енді осы тізбек $[a, b]$ кесіндіде (37) теңдеуінің үзіліссіз шешіміне жинақты болатынын көрсетуге болады.

Расында, $\varphi_n(x)$ функциясын

$$\varphi_n(x) = \varphi_0(x) + [\varphi_1(x) - \varphi_0(x)] + [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)] \dots + [\varphi_n - \varphi_{n-1}(x)]$$

түрінде жазайық. Міне бұдан біз тізбектің жинақтылығын дәлеледеудің орнына $\varphi_0 + (\varphi_1 - \varphi_0) + (\varphi_2 - \varphi_1) + \dots + (\varphi_n - \varphi_{n-1}) + \dots$ қатарының бірқалыпты жинақтылығын дәлелдеу жеткілікті екенін көрсетеміз. Ол үшін $\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)$ айырымын бағалайық:

$$|\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| \leq |\lambda| \int_a^x |K(x,s;\varphi_0)| ds \leq |\lambda| N \int_a^x |\varphi_1(s) - \varphi_0(s)| ds$$

белгілеуін енгізіп, соңғы теңсіздікті

$$|\varphi_2 - \varphi_1| \leq |\lambda| M_0 N \frac{|x-a|}{1!}$$

түрінде жазамыз. Дәл осылай,

$$|\varphi_3 - \varphi_2| \leq |\lambda| N \int_a^x |\varphi_2(s) - \varphi_1(s)| ds \leq |\lambda|^2 N^2 M_0 \int_a^x (s-a) ds \leq |\lambda|^2 N^2 M_0 \frac{(x-a)^2}{2!},$$

олай болса, жалпы түрде:

$$|\varphi_{n+1} - \varphi_n| \leq |\lambda|^n N^n M_0 \frac{(x-a)^n}{n!}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Бұдан қатардың бірқалыпты жинақтылығын, яғни жуықтау тізбегінің шешімге жинақты екенін көреміз.

§3.4. Ерекшелігі әлсіз ядролы интегралдық теңдеулер

1. Фредгольм теңдеуі. Ақырлы $D \subset R^m$ облысында көп аргументті теңдеу қарастырайық:

$$\varphi(x) = \lambda \int_D K(x,s) \varphi(s) ds, \tag{38}$$

$$K(x,s) = \frac{H(x,s)}{|x-s|^\alpha}, \quad 0 \leq \alpha \leq m, \quad H(x,s) \in C(D \times D). \tag{39}$$

(38) түріндегі теңдеуді ерекшелігі әлсіз ядролы интегралдық теңдеу, ал (39) түріндегі ядроны ерекшелігі әлсіз немесе полярлық ядро деп атайды. Егер $\alpha < \frac{m}{2}$ болса, онда $K(x,s)$ Фредгольм ядросы деп аталады. Расында, $\alpha < \frac{m}{2}$ болған жағдайда

$$\int_D |K(x,s)|^2 ds = \frac{c^2 |S_1| h^{m-2\alpha}}{m-2\alpha} < \infty.$$

Мұндағы, S_1 болса R^m кеңістігіндегі радиусы бірге тең сфера бетінің ауданы, ал h болса D облысының диаметрі. $|H(x,s)| \leq c < \infty$ болғандықтан,

$$\int_D |K(x,s)|^2 ds \leq c^2 \int_D \frac{ds}{|x-s|^{2\alpha}} \leq c^2 \int_{|x-s| \leq h} \frac{ds}{|x-s|^{2\alpha}}$$

орынды. Бұл соңғы интегралда центрі x нүктесінде болатын сфералық координаталарға көшсек және $ds = r^{m+1} dr dS_1$ екенін ескерсек,

$$\int_D |K(x,s)|^2 ds \leq c^2 \int_{|x-s| \leq h} \frac{ds}{|x-s|^{2\alpha}} = c^2 \int_0^h \int_{S_1} \frac{r^{m-1}}{r^{2\alpha}} dr dS_1 = c^2 \frac{|S_1| h^{m-2\alpha}}{m-2\alpha}.$$

1-лемма. Ерекшелігі әлсіз ядролы K интегралдық операторы $C(D)$ кеңістігін тағы да $C(D)$ -ға, ал $L_2(D)$ кеңістігін тағы да сол $L_2(D)$ кеңістігіне бейнелейді:

$$\begin{aligned} \|Kf\|_c &\leq N \|f\|_c, \quad N = \max_{x \in D} \int_D |K(x,s)| ds, \\ \|Kf\|_{L_2} &\leq \sqrt{NN^*} \|f\|_{L_2}, \quad N^* = \max_{s \in D} \int_D |K(x,s)| dx. \end{aligned}$$

Дәлелдеуі. Алдымен

$$\int_{\omega_\delta} \frac{ds}{|x-s|^\alpha} \leq c_\alpha \delta^{n-\alpha}, \quad \forall x \in R^m \quad (40)$$

теңсіздігін дәлелдейік. Бұл теңсіздіктегі ω_δ радиусы δ болған шар. Расында, егер $|x| \geq 2\delta$ болса, онда $|x-s| \geq |x|-|s| > \delta$ теңсіздігі барлық $|s| \leq \delta$ мәндерінде орынды, сондықтан

$$\int_{\omega_\delta} \frac{ds}{|x-s|^\alpha} \leq \frac{1}{\delta^\alpha} \int_{\omega_\delta} ds = \frac{1}{\delta^\alpha} \int_0^\delta dr \int_{S_1} r^{n-1} dS_1 = \frac{\delta^{n-\alpha}}{n} |S_1|.$$

Егер де $|x| \leq 2\delta$ болса, онда $|x-y| \leq |x|+|y| \leq 3\delta$ және

$$\int_{\omega_\delta} \frac{ds}{|x-s|^\alpha} \leq \int_{\omega_{3\delta}} \frac{d\xi}{|\xi|^\alpha} = \frac{(3\delta)^{n-\alpha}}{n-\alpha} |S_1|,$$

демек, (40) теңсіздігі дәлелденді.

$f \in C(D)$ болсын. Ол кезде

$$(Kf)(x) = \int_D K(x,s)f(s)ds = \int_D \frac{H(x,s)}{|x-s|^2} f(s)ds$$

D облысында үзіліссіз функция болады. $\forall x_0 \in \bar{D}$ нүктесін бекітіп және $\forall \varepsilon > 0$ деп алайық. Сонда

$$|(Kf)(x) - (Kf)(x_0)| \leq c \int_{\omega_\delta(x_0)} \left| \frac{1}{|x-s|^\alpha} + \frac{1}{|x_0-s|^\alpha} \right| ds + c \int_{D \setminus \omega_\delta(x_0)} \left| \frac{1}{|x-s|^\alpha} + \frac{1}{|x_0-s|^\alpha} \right| ds.$$

Бұл өрнектің оң жағындағы бірінші интеграл (40) теңсіздігіне байланысты $2CC_\alpha \delta^{n-\alpha}$ шамасынан үлкен бола алмайды, ендеше δ -ны жеткілікті дәрежеде кішірейтіп, бірінші интегралды $\frac{\varepsilon}{2}$ -ден кіші етуге болады. Ал екінші интеграл астындағы өрнектер $|x-x_0| < \frac{\delta}{2}$ мен $|x_0-s| \geq \delta$ облыстарында (x,s) аргумент-тері бойынша бірқалыпты үзіліссіз, сондықтан барлық $x \in \omega_{\delta/2}(x_0)$ үшін ол интегралды әрқашан $\frac{\varepsilon}{2}$ -ден кіші етуге болады. Демек, барлық $|x-x_0| < \frac{\delta}{2}$ үшін $|(Kf)(x) - (Kf)(x_0)| < \varepsilon$.

Бұл $\forall x_0 \in \bar{D}$ нүктесінде $(Kf)(x)$ -тің үзіліссіз екенін көрсетеді, яғни $Kf(x) \in C(\bar{D})$. Олай болса,

$$\|Kf\|_C = \max_x \int_D |K(x,s)f(s)|ds \leq \|f\|_C \max_x \int_D |K(x,s)|ds = N\|f\|_C$$

теңсіздігі орынды.

Енді $f \in L_2(D)$ болсын. Коши-Буняковский теңсіздігін пайдалансақ,

$$\begin{aligned} \|Kf\|_{L_2}^2 &= \int_D |Kf|^2 ds = \int_D \left| \int_D K(x,s)f(s)ds \right|^2 dx \leq \int_D \left[\int_D \sqrt{|K(x,s)|} \cdot \sqrt{|K(x,s)|} \cdot |f(s)|ds \right]^2 dx \leq \\ &\leq \int_D \left\{ \int_D |K(x,s)|ds \int_D |K(x,s)| \cdot |f|^2 ds \right\} dx \leq N \int_D \left(|f|^2 \int_D |K|dx \right) ds \leq NN^* \int_D |f|^2 ds = NN^* \|f\|_{L_2}^2. \end{aligned}$$

Бұл K операторының $L_2(D)$ кеңістігін $L_2(D)$ -ға бейнелейтінін көрсетеді.

Осы дәлелдеген лемманы және өткен параграфтағы тұжырымдарды пайдалансақ, ерекшелігі әлсіз ядролы (38) интегралдық теңдеуінің шектелген $\bar{D} \times \bar{D}$ облысында кез келген $f \in C(\bar{D})$ және $|\lambda| < \frac{1}{N}$ болғанда Нейман қатары түріндегі жалғыз шешімі бар болады, ол қатар $\bar{D}$ облысында бірқалыпты жинақты. Сонымен бірге жоғарыдағы ерекшелігі әлсіз (39) ядролы (38) интегралдық теңдеуін

ядрасы шектелген эквивалентті интегралдық теңдеумен ауыстырып шешуге болады.

Алдымен мына лемманы дәлелдейік.

2-лемма. Егер $K_i(x,s) = \frac{A_i}{|x-s|^{\alpha_i}}, \alpha_i < m, i = 1,2$ болып және $D \subset R^m$ шектелген облыс болса, онда

$$K_3(x,s) = \int_D K_2(x,t)K_1(t,s)dt \tag{41}$$

поляризация ядро, оның үстіне

$$K_3(x,s) \leq \begin{cases} \frac{A_3}{|x-s|^{\alpha_1+\alpha_2-m}}, & \alpha_1+\alpha_2 > m, \\ A_4 \ln|x-s| + A_5, & \alpha_1+\alpha_2 = m, \\ \overline{D} \times \overline{D} \text{ облысында үзіліссіз}, & \alpha_1+\alpha_2 < m \end{cases} \tag{42}$$

болады.

Дәлелдеуі. Егер $\alpha_1+\alpha_2 < m$ болса, $\int_D K_2(x,t)K_1(t,s)dt$ интегралының кез келген $\forall x,s \in \overline{D}$ үшін бірқалыпты жинақты екені түсінікті, сондықтан $K_3(x,s)$ ядрасы $\overline{D} \times \overline{D}$ облысында үзіліссіз. Лемманы толық дәлелдеу үшін $\alpha_1+\alpha_2 \geq m$ болғанда (42) теңсіздігін дәлелдейік. (41) ядросын бағалау нәтижесінде

$$|K_3(x,t)| = A_1 A_2 \int_D \frac{dt}{(x-t)^{\alpha_2}(t-s)^{\alpha_1}}, \forall x,s \in D$$

екенін аламыз. Бұл теңсіздікке $\eta = x-t$ ауыстыруын енгізіп, D облысын диаметрі h болған $\omega_h(x)$ шарына ауыстырсак,

$$|K_3(x,s)| \leq A_1 A_2 \int_{\omega_h(x)} \frac{d\eta}{\eta^{\alpha_2} |x-s-\eta|^{\alpha_1}}.$$

Енді $|x-s|=r$ ($x-s=r \cdot \theta, |\theta|=1$) белгілеулерін енгізіп және интегралдағы айнымалыларды $r=r\xi, d\eta=r^n d\xi$ етіп ауыстырсак,

$$\begin{aligned} |K_3(x,s)| &\leq A_1 A_2 r^{m-\alpha_1-\alpha_2} \int_{\omega_{h/2}(0)} \frac{d\xi}{|\xi|^{\alpha_2} |\theta-\xi|^{\alpha_1}} = \\ &= A_1 A_2 r^{m-\alpha_1-\alpha_2} \left(\int_{|\xi| \leq 2} \frac{d\xi}{|\xi|^{\alpha_2} |\theta-\xi|^{\alpha_1}} + \int_{2 < |\xi| < \frac{h}{2}} \frac{d\xi}{|\xi|^{\alpha_2} |\theta-\xi|^{\alpha_1}} \right). \end{aligned}$$

Бұл теңсіздіктің оң жағындағы бірінші интеграл $|\theta|=1$ болғандықтан шектелген шама, яғни

$$\int_{|\xi|<2} \frac{d\xi}{|\xi|^{\alpha_2} |\theta - \xi|^{\alpha_1}} \leq A_6,$$

ал $|\xi| \geq 2$ болған кезде $|\theta - \xi| \geq |\xi| - |\theta| = |\xi| - 1 \geq \frac{|\xi|}{2}$ екенін ескеріп, екінші интегралды бағаласак,

$$\int_{2 \leq |\xi| \leq \frac{h}{2}} \frac{d\xi}{|\xi|^{\alpha_2} |\theta - \xi|^{\alpha_1}} \leq 2^{\alpha_1} \int_{1 \leq |\xi| \leq \frac{h}{2}} \frac{d\xi}{|\xi|^{\alpha_1 + \alpha_2}} = 2^{\alpha_1} |S_1| \int_1^{\frac{h}{2}} \rho^{m-1-\alpha_1-\alpha_2} d\rho \leq \begin{cases} 2^{\alpha_1} |S_1| \left[\frac{h}{2} - 1 \right], & \alpha_1 + \alpha_2 > m \\ 2^{\alpha_1} |S_1| \ln \left(\frac{h}{2} \right), & \alpha_1 + \alpha_2 = m. \end{cases}$$

Міне, осы соңғы теңсіздіктерден (42) өрнегінің орынды екені шығады.

➤ **Салдар.** Егер ядро әлсіз ерекшелікті болса,оның қайталанған ядролары қайсыбір (екінші) нөмерінен бастап шектелген болады.

Расында, $K(x,s) = \frac{H(x,s)}{|x-s|^\alpha}$, $0 \leq \alpha \leq m$ ядросының n қайталанушы ядросы, 2

лемма бойынша

$$|K_n(x,s)| \leq \begin{cases} \frac{C_n}{|x-s|^{n\alpha-(n-1)m}}, & n\alpha-(n-1)m > 0, \\ C_m, & n\alpha-(n-1)m < 0 \end{cases}$$

түрінде бағаланады, мұндағы, C_n шектелген тұрақты шама. Әрине, бұл өрнек шектелген (егер $n \geq \left\lceil \frac{m}{m-\alpha} \right\rceil$) болса. Барлық уақытта жоғарғы (39) түріндегі ерекшелігі әлсіз ядролы (38) интегралдық теңдеуінің ядросы қайталанған $K_2(x,s)$ немесе $K_3(x,s)$, $K_4(x,s)$ ядроларымен ауысқан сол типтегі теңдеулерге келтіруге болады. Ол үшін (38) теңдеуіндегі x -ті s -пен, ал s -ті t -мен ауыстырып, одан кейін теңдеуді $\lambda K(x,s)$ -ке көбейтіп, пайда болған өрнекті s бойынша интегралдап,

$$\lambda \int_D K(x,s) \varphi(s) ds = \lambda \int_D \left\{ \lambda \int_D K(s,t) \varphi(t) dt \right\} K(x,t) ds + \lambda \int_D f(s) K(x,s) ds$$

теңдеуін аламыз. Бұл теңдеуден және (38) теңдігінен

$$\varphi(x) = \lambda^2 \int_D K_2(x,s) \varphi(s) ds + f_2(x)$$

екені шығады, мұндағы,

$$f_2(x) = f(x) + \lambda \int_D K(x,s)f(s)ds.$$

Дәл осылай

$$\varphi(x) = \lambda^3 \int_D K(x,s)\varphi(s)ds + f_3(x),$$

ал мұнда,

$$f_3(x) = f_2(x) + \lambda \int_D K_2(x,s)f_2(s)ds,$$

міне, осылай жалғаса береді.

Бұл үдерісті шектелген санақты түрде қайталап, ядросы $K_n(x,s)$ шектелген, үзіліссіз болған Фредгольмнің 2-текті интегралдық теңдеуін аламыз. Демек, ерекшелігі әлсіз ядролы интегралдық теңдеуді регуляярлы ядролы интегралдық теңдеуге келтірдік.

2. Вольтерра теңдеуі. Ерекшелігі әлсіз ядролы

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x,s)\varphi(s)ds + f(x) \quad (43)$$

теңдеуге келтіруге болады. Мұнда,

$$f_n(x) = f_{n-1}(x) + \lambda \int_a^x K(x,s)f_{n-1}(s)ds, \quad f_1(x) = f(x).$$

3-лемма. Егер (43) теңдеуінің ядросы

$$K(x,s) = \frac{H(x,s)}{|x-s|^\alpha}, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

түрінде болса, онда ол теңдеудің ядросы қайталанушы

$$K_n(x,s) = \frac{H_n(x,s)}{|x-s|^{n(\alpha-1)+1}}, \quad n = 2, 3, \dots$$

түрінде болады, мұнда $H_n(x,s)$ кез келген шектелген функция.

Дәлелдеуі. Алдымен $K_2(x,s)$ жағдайын қарастырайық:

$$K_2(x,s) = \int_s^x K(x,t)K(t,s)dt = \int_s^x \frac{H(x,t)H(t,s)}{(x-t)^\alpha(t-s)^\alpha}dt,$$

бұған $t = s + (x-s)z$ деп жаңа айнымалы енгізсек,

$$K_2(x,s) = \frac{1}{|x-s|^{2\alpha-1}} \int_0^1 \frac{H(x,s+(x-s)z)H(s+(x-s)z,s)}{z^\alpha(1-z)^\alpha} dz = \frac{H_2(x,s)}{|x-s|^{2\alpha-1}},$$

мұнда $H_2(x,s)$ шектелген үзіліссіз функция, себебі бұл соңғы өрнектегі интеграл $\alpha < 1$ болғанда жинақты. Осы үдерісті қайталап,

$$K_3(x,s) = \frac{H_3(x,s)}{|x-s|^{3\alpha-2}}, \dots, K_n(x,s) = \frac{H_n(x,s)}{|x-s|^{n\alpha-n+1}}, \dots$$

қатыстарын аламыз. Ал осы өрнектерден белгілі бір n нөмерінен бастап $K_n(x,s)$ ядросы шектелген, демек, осындай ерекшелігі әлсіз (43) интегралдық теңдеуі Вольтерраның шектелген ядролы теңдеуіне келеді. Сонымен ерекше ядролы Вольтерраның интегралдық теңдеуін ядросы шектелген интегралдық теңдеуге ауыстырдық. Соңғы теңдеуді біртіндеп жуықтау әдісімен шешеді, ол шешім λ - ның кез келген мәні үшін табылады.

4. ФРЕДГОЛЬМ ТЕОРИЯСЫ

§4.1. Ерекшеленген ядролы Фредгольмнің 2-текті интегралдың теңдеуі

Ерекшеленген ядро деп біреуі тек x айнымалысына, ал екіншісі тек S айнымалысына тәуелді екі функция көбейтінділерінің ақырлы қосындысынан тұратын, яғни

$$K(x, s) = \sum_{i=1}^n a_i(x)b_i(s) \quad (44)$$

түріндегі ядро аталады. Жалпы жағдайда $a_i(x), b_i(s)$ функциялары өзара сызықты тәуелсіз деп қараймыз. Егер олардың кейбіреулері сызықты тәуелді болса, (44) өрнегіндегі қосылғыштарды жинақтап, көбейткіштері сызықты тәуелсіз болатындай етіп түрлендіруге болады.

$a_i(x), b_i(s) \in L_2[a, b]$ болсын. Бұл жағдайда $K(x, s) \in L_2[a, b]$ Фредгольмнің екінші текті

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)\varphi(s)ds + f(x) \quad (45)$$

интегралдық теңдеуін қарастырайық. Егер $K(x, s)$ ядросын (44) өрнекпен ауыстырсақ, онда (45) теңдеуден

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{i=1}^n a_i(x) \int_a^b b_i(s)\varphi(s)ds + f(x) \quad (46)$$

теңдеуі шығады. Бұл теңдеудің шешімі бар деп ұйғарайық. Егер

$$C_i = \lambda \sum_{i=1}^n b_i(s)\varphi(s)ds, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

деп белгілесек, онда

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^n C_i a_i(x). \quad (47)$$

Сонымен (45) теңдеуінің шешімін табу мәселесі тұрақты $C_i, i = \overline{1, n}$ белгісіз коэффициенттерін анықтауға келтіріледі.

Егер (47) теңдеуінің екі жағында $b_i(x)$ функцияларына көбейтіп, алған өрнекті x бойынша a -дан b -ға дейін интегралдасақ, C_i коэффициенттерін анықтайтын алгебралық сызықтық теңдеулер жүйесін

$$C_i = f_i + \lambda \sum_{j=1}^n C_j K_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

аламыз, мұнда

$$f_i = \int_a^b f(x) b_i(x) dx, \quad K_{ij} = \int_a^b b_i(x) a_j(x) dx.$$

Әрине, осы алгебралық жүйенің шешімі жоқ болса, онда (46) интегралдық теңдеуінің де шешімі жоқ болады. Егер $C_1, C_2, \dots, C_n$ белгісіздері (48) жүйенің шешімдері бар болса, онда (47) теңдігінен $\varphi(x)$ функциясының (46) теңдеуінің шешімі екенін тексеріп көру қиын емес.

Ал (48) теңдеулер жүйесі шешімінің бар болуы белгісіз $C_1, C_2, \dots, C_n$ коэффициенттерінен құралған анықтауышқа байланысты екені алгебрадан белгілі. Сондықтан

$$D_n(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda K_{11} & -\lambda K_{12} & \dots & -\lambda K_{1n} \\ -\lambda K_{21} & 1 - \lambda K_{22} & \dots & -\lambda K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda K_{n1} & -\lambda K_{n2} & \dots & 1 - \lambda K_{nn} \end{vmatrix}$$

анықтауышын қарастырайық. Әрине $D_n(\lambda)$ анықтауыш λ -ға байланысты n -дәрежелі көпмүшелік және $D_n(\lambda) \neq 0$, себебі $D_n(0) = 1$. Демек, $D_n(\lambda)$ көп-мүшелігі түбірлерінің саны n -нан артық болмайды. Ол түбірлерін $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ деп белгілейік.

$D_n(\lambda)$ көпмүшелігі (46) теңдеуі үшін **Фредгольм анықтауышы**, ал ол көпмүшеліктің түбірлері $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ $K_n(x, s)$ ядросының немесе (46) интегралдық теңдеуінің меншікті мәндері (сандары) деп аталады. Сызықтық алгебралық жүйе теориясы ($D_n(\lambda)$ анықтауыш үшін) мына тұжырымдарға әкеледі.

1⁰. Егер λ саны $D_n(\lambda)$ көпмүшелігі түбірлерінің бірде біреуіне тең болмаса, онда кез келген $f_i, (i = 1, 2, \dots, n)$ функциялары үшін (48) жүйенің жалғыз ғана шешімі бар болады. Демек, (45) интегралдық теңдеуі үшін мына тұжырым орындалады.

1-теорема. Егер λ саны $K(x, s)$ ядросының меншікті мәні болмаса, онда (46) интегралдық теңдеуінің кез келген $f(x)$ үшін (47) өрнегімен анықталған жалғыз ғана $\varphi(x)$ шешімі бар болады.

Әдетте, бұл тұжырымды “Фредгольмнің бірінші теоремасы” дейді. $D_n(\lambda) \neq 0$ болса, біртекті алгебралық жүйенің шешімдері $C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0$ болады. Сондықтан $D_n(\lambda) \neq 0$ жағдайында біртекті интегралдық теңдеудің ($f(x) = 0$ тек қана нөлдік шешімі бар болады.

Егер (48) жүйесін Крамер әдісі бойынша шешетін болсақ, онда алымындағы анықтауыштарды бос мүшесі орналасқан баған элементтері бойынша жіктеп,

$$C_i = \frac{1}{D_n(\lambda)} \sum_{j=1}^n D_{ij}(\lambda), \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

жазуға болады. Мұндағы, $D_{ij}(\lambda)$ алгебралық толықтауыш, ол көрсеткіші $n-1$ -ден аспайтын λ -ға байланысты көпмүшелік. Белгісіз C_i ($i = 1, 2, \dots, n$) сандарының осы мәндерін (47) формуласына қойып, (46) теңдеуінің шешімін

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^n \frac{1}{D_n(\lambda)} \sum_{j=1}^n D_{ij}(\lambda) a_i(x) \int_a^b f(s) b_j(s) ds$$

түрінде немесе

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, s; \lambda) f(s) ds$$

формуласымен анықтаймыз, мұнда

$$R(x, s; \lambda) = \frac{1}{D_n(\lambda)} \sum_{i,j=1}^n D_{ij}(\lambda) a_i(x) b_j(s)$$

жоғарыдағы (46) интегралдық теңдеуінің резольвентасы (шешуші ядросы) делінеді.

2⁰. Енді λ саны $D_n(\lambda) = 0$ теңдеуі түбірлерінің біреуіне тең, яғни K ядросының меншікті мәні болсын. Онда (48) жүйенің анықтауышы нөлге тең. Бұндай жағдайда сәйкес біртекті

$$C_i - \lambda \sum_{j=1}^n K_{ij} C_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

жүйенің $p = n - r$ теңдеуі (мұнда r саны $D_n(\lambda)$ матрицасының рангі) сызықты тәуелсіз және нөлге тең емес

$$(C_1^{(l)}, C_2^{(l)}, \dots, C_n^{(l)}) \quad l = 1, 2, \dots, p$$

вектор оның шешімі болады. Ал сонда

$$\varphi_i(x) = \sum_{l=1}^p C_l^{(i)} a_i(x)$$

функциялары біртекті интегралдық теңдеуінің

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{i=1}^n a_i(x) \int_a^b b_i(s) \varphi(s) ds$$

нөлге тең емес шешімдері болады. Бұл теңдеудің жалпы шешімі болып

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(x)$$

мұндағы, α_i кез келген тұрақты шамалар. Біртекті интегралдық теңдеудің нөлге тең емес шешімдерін сол теңдеудің меншікті мәндеріне сәйкес келетін меншікті функциялары деп атайды.

Енді (45) теңдеуімен қатар

$$\psi(x) = \lambda \int_a^b K^*(x,s) \psi(s) ds + g(x)$$

интегралдық теңдеуді қарастырайық, мұнда, $K^*(x,s) = K(s,x)$. Осы теңдеуді (45) интегралдық теңдеуіне *түйіндес теңдеу* деп атайды. Ерекшеленген ядролы (46) интегралдық теңдеуіне *түйіндес*

$$\psi(x) = \lambda \sum_{i=1}^n \int_a^b a_i(s) b_i(x) \psi(s) ds + g(x)$$

теңдеуді қарастырайық. Бұл теңдеу үшін, (46) теңдеуіне айтылған тұжырымдарды сөзбе-сөз қайталауға болады. Оның шешімі

$$\psi(x) = g(x) + \lambda \sum_{i=1}^n C_i^* b_i(x)$$

түрінде жазылады, мұнда,

$$C_i^* = \int_a^b \psi(s) a_i(s) ds.$$

Егер $g(x) = 0$, яғни теңдеу біртекті болса, онда C_i^* тұрақты коэффициенттерін сәйкес біртекті жүйеге түйіндес

$$C_i^* - \lambda \sum_{j=1}^n K_{ij} C_j^* = 0, \quad (i=1,2,\dots,n)$$

теңдеулері жүйесінен анықтаймыз. $D_n(\lambda)$ анықтауышы аталған жүйелерге ортақ болғандықтан соңғы жүйенің $p = n - r$ сызықты байланыссыз вектор-шешімі бар болады:

$$(C_1^{*(l)}, C_2^{*(l)}, \dots, C_n^{*(l)}), \quad l=1,2,\dots,p.$$

Сондықтан $\psi_i(x) = \sum_{l=1}^p C_i^{*(l)} b_i(x)$ функциялары түйіндес біртекті интегралдық теңдеуінің

$$\psi(x) = \lambda \sum_{i=1}^n b_i(x) \int_a^b a_i(s) \psi(s) ds$$

шешімдері болады. Осыдан мынандай қорытынды шығады.

2-теорема. Егер λ параметірі $K(s, x)$ ядросының меншікті мәні болса, онда біртекті интегралдық теңдеу мен оған түйіндес теңдеудің бірдей санды сызықты тәуелсіз меншікті функциялары бар болады.

Бұл тұжырымды “Фредгольмнің екінші теоремасы” деп айтады.

3⁰. Енді λ параметрі бір текті емес (46) интегралдық теңдеуінің меншікті мәні болған жағдайды қарастырайық. Жоғарыда айтқандай (46) теңдеуінің шешілуі (48) сызықты теңдеулер жүйесінің шешілуімен эквивалентті. Сондықтан егер λ параметрі $D_n(\lambda)$ теңдеуінің түбірі болса, онда (48) жүйе шешілмейді, демек, (46) интегралдық теңдеуінің шешімі жоқ болады. Ал, егер $f_i(x) = 0$, яғни:

$$\int_a^b f(x) b_i(x) dx = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

болса, онда (48) жүйенің шешімі бар. Демек, соңғы шарттар орындалған жағдайда (46) біртекті емес интегралдық теңдеуінің шешімі бар болады. Осы шарттарды жоғарыдағы қатарға қолдансақ,

$$\int_a^b f(x) \psi_l(x) dx = \sum_{i=1}^n C_i^{(l)} \int_a^b f(x) b_i(x) dx = 0, \quad (l = 1, 2, \dots, p)$$

шарттарын аламыз. Сонымен мынадай теореманы дәлелдедік.

3-теорема. Егер λ ядроның меншікті мәні болса, онда жалпы жағдайда (46) интегралдық теңдеуінің шешімі жоқ болады. Біртекті емес (46) интегралдық теңдеуінің шешімі бар болуы үшін ондағы бос мүше $f(x)$ ол теңдеуге түйіндес біртекті теңдеудің сәйкес барлық шешімдеріне ортогональ болуы қажетті және жеткілікті.

Бұл–“Фредгольмнің үшінші теоремасы”. Ал соңғы шарттар орындалған жағдайда (46) теңдеуінің ақырсыз көп шешімі бар болады:

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varphi_i(x),$$

мұндағы, $\varphi_0(x)$ – біртекті емес интегралды теңдеудің жеке шешімі, ал $\sum_{i=1}^p \alpha_i \varphi_i(x)$ сәйкес біртекті теңдеудің жалпы шешімі.

§4.2. Фредгольмнің жалпы интегралдық теңдеуін ерекшеленген ядролы теңдеуге келтіру

Фредгольмнің ерекшеленген ядролы интегралдық теңдеуін шешу мәселесін екі интегралдық теңдеуді шешуге келтіреміз: ол теңдеулердің біреуі біртіндеп жуықтау әдісімен, яғни резольвента арқылы шешіледі, ал екінші–ерекшеленген ядролы теңдеу, бұл жағдайда $K(s, x)$ ядросы өзіне жуық ерекшеленген ядромен

аппроксимацияланады. Мұндай аппроксимациялауды бірнеше жолмен орындауға болады. Мәселен, егер $K(s, x)$ ядросы $a \leq x, s \leq b$ облысында бірқалыпты жинақты дәрежелік немесе қос тригонометриялық қатарға жіктелсе, онда $K(s, x)$ ядросына дәрежелік немесе тригонометриялық қатардың S_n дербес қосындысы мен жуықтауға болады, ал $K(x, s) - S_n$ айырымы жйнақталатын қатардың қалдығы болғандықтан ақырсыз аз шама.

Фредгольмнің 2-текті

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds + f(x) \quad (49)$$

теңдеуін қарастырайық. Бұл теңдеудегі ядро $K(x, s) \in L_2(a, b)$, яғни

$$\int_a^b \int_a^b K^2(x, s) dx ds = B^2 < \infty$$

болсын. $\varphi_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots$) функциялары $[a, b]$ аралығында ортонормаланған және ол жүйе толық болсын. Белгілі $K(x, s) \in L_2(a, b)$, ядросын $\varphi_k(x) \varphi_m(s)$ функцияларымен Фурье қатарына

$$K(x, s) = \sum_{k, m=1}^{\infty} A_{km} \varphi_k(x) \varphi_m(s) \quad (50)$$

жіктеуге болады. Бұл қатар $a \leq x, s \leq b$ болғанда орташа мағанада жинақты.

$\varphi_k(x) \varphi_m(s)$ функциялары жүйесі $a \leq x, s \leq b$ облысында толық болғандықтан, Парсевальдың тұйықтық шарты

$$\sum_{k, m=1}^{\infty} A_{km}^2 = B^2 \quad (51)$$

орынды. Егер (50) қатарының дербес қосындысын

$$K_n(x, s) = \sum_{k, m=1}^n A_{km} \varphi_k(x) \varphi_m(s)$$

деп белгілесек, ол ерекшеленген ядро болады.

Енді $K_0(x, s) = K(x, s) - K_n(x, s)$ деп белгілейік. Сонда $K_0(x, s)$ функциясы (50) Фурье қатарының қалдығы болады:

$$\sum_{k, m \geq n} A_{km} \varphi_k(x) \varphi_m(s) = K_0(x, s),$$

$$\int_a^b \int_a^b K_0^2(x, s) ds dx = B_0^2$$

деп белгілейік. Осы қатарға тұйықтық шартын пайдалансақ,

$$B_0^2 = \sum_{k,m>n} A_{km}^2$$

өрнегін аламыз. Алынған қатар жинақталатын (51) қатарының қалдығы, сондықтан соңғы қатар қосындысы n , жеткілікті дәрежедегі үлкен сан болғанда, жеткілікті дәрежедегі аз шама. Сондықтан n -ның үлкен мәндерінде $|\lambda|B_0 < 1$ теңсіздігі орындалады, бұл шартты қанағаттандыратын $K_0(x,s)$ -ті **кішкентай ядро** деп атаймыз.

Сонымен $K(x,s)$ ядросы $K(x,s) = K_0(x,s) + K_n(x,s)$ түріндегі ($K_n(x,s)$ – ерекшеленген, ал $K_0(x,s)$ кішкентай) ядроларға жіктеледі. Енді (49) теңдеуінің ядросын соңғы теңдіктегі қосындымен ауыстырып,

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K_0(x,s) \varphi(s) ds = f(x) + \lambda \int_a^b K_n(x,s) \varphi(s) ds$$

өрнегін аламыз. Осы теңдіктің оң жағындағы өрнекті

$$F(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K_n(x,s) \varphi(s) ds$$

деп белгілесек, онда

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K_0(x,s) \varphi(s) ds = F(x)$$

теңдеуін аламыз. Бұрынғы дәлелдеулер бойынша $|\lambda|B_0 < 1$ шарты орындалғанда бұл теңдеудің жалғыз шешімі бар болады, ол шешім $K_0(x,s)$ ядросының резольвентасы $R(x,s;\lambda)$ арқылы өрнектеледі:

$$\varphi(x) = F(x) + \lambda \int_a^b R(x,s;\lambda) F(s) ds.$$

Ал $F(x)$ функциясын оның мәнімен ауыстырсақ,

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & \lambda \int_a^b K_n(x,s) \varphi(s) ds + f(x) + \lambda \int_a^b R_0(x,s;\lambda) \left[f(s) + \lambda \int_a^b K_n(s,t) \varphi(t) dt \right] ds + \\ & + \lambda \int_a^b R_0(x,s;\lambda) f(s) ds + \lambda \int_a^b \left[K_n(x,s) + \lambda \int_a^b R_0(x,t;\lambda) K_n(t,s) dt \right] \varphi(s) ds. \end{aligned}$$

Енді

$$\tilde{K}(x,s) = K_n(x,s) + \lambda \int_a^b R_0(x,t;\lambda) K_n(t,s) dt,$$

$$\widetilde{f}(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R_0(x, s; \lambda) f(s) ds$$

деп белгілесек, теңдеуді

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b \widetilde{K}(x, s) \varphi(s) ds + \widetilde{f}(x)$$

түріне келтіреміз. Әрине, мұндағы $K(x, s)$ – ерекшеленген ядро, себебі, $K_n(x, s)$ ядросы тозғындалған:

$$\int_a^b R_0(x, t; \lambda) K_n(t, s) dt = \int_a^b R_0(x, t; \lambda) \sum_{k, m=1}^n \varphi_k(t) \varphi_m(s) dt = \sum_{k, m=1}^n \left(\int_a^b R_0(x, t; \lambda) \varphi_k(t) dt \right) \varphi_m(s).$$

Сонымен, (49) түріндегі кез келген интегралдық теңдеуді ерекшеленген ядролы теңдеуге келтіруге болады. Міне, осы жағдайды пайдаланып, ерекшеленген ядролы интегралдық теңдеу үшін Фредгольм теоремасы үзіліссіз ядролы немесе ядросы L_2 -де болатын кез келген Фредгольмнің 2-текті интегралдық теңдеуі үшін орынды деп айта аламыз.

• **Ескерту.** Қолданбалы есептерде бұл теорияны пайдаланғанда $K_0(x, s)$ ядросын қажетті дәрежеде аз етіп, оны ескермей, бірден белгісіз функцияны $\varphi(x)$, оң жағы $f(x)$ болған ерекшеленген ядролы интегралдық теңдеуді шешеді. Бұл жағдайда ядросы $K_n(x, s)$ ерекшеленген интегралдық теңдеудің шешімі ерекшеленбеген теңдеудің шешімінен өте аз шамада ғана айырмашылықта болатынын көрсету оңай.

§4.3. Фредгольмнің анықтауыштар әдісі

Осы ғасырдың басында Фредгольм өз атымен аталатын

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds + f(x) \quad (52)$$

теңдеуінің ядросы $K(x, s) \in C[a, b]$, бос мүшесі $f(x) \in C[a, b]$ және параметрі λ - ның әртүрлі болатын жағдайларын терең зерттеп, осы (52) теңдеу үшін негізгі теоремаларды дәлелдеген. Сол маңызды зерттеулердің нәтижесінің негізінде "Фредгольмнің анықтауыштар" әдісі деп аталып кеткен әдісті қарастырайық.

$[a, b]$ сегментін ұзындықтары $\delta = \frac{b-a}{n}$ болатындай тең n бөліктерге бөліп, (52) теңдеуіндегі интегралды интегралдық қосындылармен ауыстырады. Нәтижеде берілген теңдеуге жуық

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{j=1}^n K(x, s_j) \varphi(s_j) \delta + f(x)$$

теңдеуін аламыз, мұнда s_i – бөлік интервалдар орталарының абциссалары. Бұл теңдеуге $x = x_1, x_2, \dots, x_n$ мәндерін қойып және әрбір бөлік интервалдарда $\varphi(x)$ пен $f(x)$ сәйкес түрде $\varphi(x_i), f(x_i)$ тұрақты мәндеріне тең болсын, ал $K(x, s)$ ядросы индекстері i мен j болған квадраттарда $K(x_i, s_j)$ тұрақты болсын десек, нәтижеде $\varphi(s_i)$ белгісіздері үшін

$$\varphi(s_i) = \lambda \sum_{j=1}^n K(x_i, s_j) \varphi(s_j) \delta + f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{53}$$

алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз.

Сонымен осы теңдеулер жүйесін шешіп, белгісіз $\varphi(x)$ функциясын бөлек-бөлек тұрақты мәнді $\varphi_n(x)$ – функциялары мен жуықтаймыз. Мұндағы n қаншалықты үлкен болса, жуықтау тізбегі $\varphi_n(x)$ $\varphi(x)$ - ті соншалықты дәл аппроксимациялайды, яғни $\varphi_n(x) - \varphi(x)$ айырымдары өте аз шама болады. Егер $n \rightarrow \infty$ болса, (53) теңдеулерінің жүйесі (52) теңдеуін береді, ал $\varphi_n(x)$ тізбегінің шегі $\varphi(x)$ функциясына тең болатыны анық. Фредгольм осы қағиданы пайдаланып, (52) интегралдық теңдеуінің шешімін тапқан, яғни (53) теңдеулері жүйесін шешіп, содан соң оның шегін тапқан.

Ыңғайлы болуы үшін $\varphi_i = \varphi(s_i), K_{ij} = K(x_i, s_j), f_i = f(x_i)$ деп белгілейік. (53) жүйенің анықтауышы

$$D_n(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda \delta K_{11} & -\lambda \delta K_{12} & \dots & -\lambda \delta K_{1n} \\ -\delta \lambda K_{21} & 1 - \lambda \delta K_{22} & \dots & -\lambda \delta K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda \delta K_{n1} & -\lambda \delta K_{n2} & \dots & 1 - \lambda \delta K_{nn} \end{vmatrix}$$

λ параметріне байланысты көпмүшелік. Тейлор формуласын пайдаланып, $D_n(\lambda)$ анықтауышын жіктейміз.

$$\begin{aligned} D_n(\lambda) = & 1 - \frac{\lambda}{1!} \sum_{p_1=1}^n K_{p_1 p_1} \delta + \frac{\lambda^2}{2!} \sum_{p_1=1}^n \sum_{p_2=1}^n \begin{vmatrix} K_{p_1 p_1} & K_{p_1 p_2} \\ K_{p_2 p_1} & K_{p_2 p_2} \end{vmatrix} \delta^2 + \dots + \\ & + (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} \sum_{p_1, p_2, \dots, p_n=1}^n \begin{vmatrix} K_{p_1 p_1} & K_{p_1 p_2} & \dots & K_{p_1 p_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{p_n p_1} & K_{p_n p_2} & \dots & K_{p_n p_n} \end{vmatrix} \delta^n, \end{aligned} \tag{54}$$

мұндағы,

$$\int_a^b K(t, t) dt \Rightarrow \sum_{p_1=1}^n K_{p_1 p_1} \delta = \sum_{i=1}^n K(x_i, x_i) \delta$$

Риманның интегралдық қосындысы екені анық. Сондықтан,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p_i=1}^n K_{p_i p_i} \delta = \int_a^b K(t,t) dt.$$

Дәл осылай

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p_1=1}^n \sum_{p_2=1}^n \begin{vmatrix} K_{p_1 p_1} & K_{p_1 p_2} \\ K_{p_2 p_1} & K_{p_2 p_2} \end{vmatrix} \delta^2 = \int_a^b \int_a^b \begin{vmatrix} K(t_1, t_1) & K(t_1, t_2) \\ K(t_2, t_1) & K(t_2, t_2) \end{vmatrix} dt_1 dt_2$$

және жалпы жағдайда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{p_1, p_2, \dots, p_n=1}^n \begin{vmatrix} K_{p_1 p_1} & \dots & K_{p_1 p_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ K_{p_n p_1} & \dots & K_{p_n p_n} \end{vmatrix} \delta^n = \int_a^b \dots \int_a^b \begin{vmatrix} K(t_1, t_1) & \dots & K(t_1, t_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ K(t_n, t_1) & \dots & K(t_n, t_n) \end{vmatrix} dt_1 \dots dt_n.$$

Демек, (54) қатары $n \rightarrow \infty$ жағдайда

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} d_n \tag{55}$$

λ бойынша дәрежелік қатар болады, мұндағы,

$$d_n = \int_a^b \dots \int_a^b \begin{vmatrix} K(t_1, t_1) & \dots & K(t_1, t_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ K(t_n, t_1) & \dots & K(t_n, t_n) \end{vmatrix} dt_1 \dots dt_n$$

(55) қатарының жинақтылығын Адамар теңсіздігін пайдаланып дәлелдейміз.

Лемма (Адамар). Егер

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

анықтаушының элементтері шектелген, яғни $|a_{ij}| \leq M$ болса, онда

$$|A| \leq M^n \sqrt{n^n}.$$

Бұл теңсіздік Адамар теңсіздігі деп аталады.

Егер $K(x, s)$ ядросы $|K(x, s)| \leq M$ теңсіздігін қанағаттандырса, онда Адамар теңсіздігін пайдалансақ, (55) қатары үшін

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\lambda|^n}{n!} M^n \sqrt{n} (b-a)^n$$

можаранттық қатар болады. Бұл можаранттық қатар λ -нің кез келген мәні үшін жинақты. Жаңа z_i белгісізін $\varphi_i = f_i + z_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) өрнегімен енгізейік. Сонда (53) жүйесінен

$$z_i - \delta \lambda \sum_{j=1}^n K_{ij} z_j = \lambda \delta \sum_{j=1}^n K_{ij} f_j \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (56)$$

теңдеулер жүйесін аламыз. Мұны Крамер әдісі бойынша шешіп,

$$z_i = \frac{\lambda \delta}{D_n(\lambda)} \sum_{j=1}^n D_{ij}(\lambda) f_j \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

екенін анықтаймыз, мұндағы, $D_{ij}(\lambda)$ параметр λ бойынша $n-1$ дәрежелі көпмүшелік. Демек, (53) жүйесі шешімін

$$\varphi_i(x) = f_i(x) + \frac{\lambda}{D_n(\lambda)} \delta \sum_{j=1}^n D_{ij}(\lambda) f_j(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

түрінде өрнектеуге болады. Осы теңдікте $n \rightarrow \infty$ жағдайда жоғарыдағы (52) интегралдық теңдеуінің шешімін

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{1}{D(\lambda)} \int_a^b D(x, s; \lambda) f(s) ds$$

анықтаймыз, мұндағы, белгісіз $D(x, s; \lambda)$ функциясы дәрежелік қатар болғандықтан,

$$D(x, s; \lambda) = d_0(x, s) + (-1)\lambda d_1(x, s) + \dots + \frac{(-1)^n \lambda^n}{n!} d_n(x, s) + \dots \quad (57)$$

түрінде іздейміз. $D(x, s; \lambda)$ өрнегіндегі $d_n(x, s)$ коэффициенттерін анықтау үшін (56) жүйенің шешімін

$$z_i = \lambda \delta \sum_{j=1}^n R_{ij}(\lambda) f_j \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

түрінде жазамыз, мұндағы,

$$R_{ij}(\lambda) = \frac{1}{D_n(\lambda)} D_{ij}(\lambda) \quad (i, j = 1, 2, \dots, n). \quad (58)$$

(56) мен алдыңғы теңдіктерге $f_1=f_2=\dots=f_n=0$, ал $f_i = 1$ деп алсак,

$$\begin{aligned} z_i - \delta \lambda \sum_{j=1}^n K_{ij} z_j &= \lambda \delta \sum_{j=1}^n K_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \\ z_i &= \lambda \delta R_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Осы соңғы теңдіктерден z_i айнымалысын шығарып тастасак, онда, R_{ij} үшін

$$R_{ij}(\lambda) = K_{ij} + \lambda \delta \sum_{m=1}^n K_{im} R_{mj}(\lambda) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

теңдігі шығады. Енді бұл теңдікте $n \rightarrow \infty$ жағдайда шекке көшсек, онда

$$R(x, s; \lambda) = K(x, s) + \lambda \int_a^b K(x, t) R(t, s; \lambda) dt$$

теңдеуін аламыз. Мұндағы, $R(x, s; \lambda)$ болса $K(x, s)$ ядросының резольвен-тасы. Ал бұл өрнекті $R(s, x; \lambda)$ үшін интегралдық теңдеу деп атайды.

Егер (58) теңдікте $n \rightarrow \infty$ болса,

$$R(x, s; \lambda) = \frac{1}{D(\lambda)} D(x, s; \lambda)$$

екенін анықтаймыз, мұндағы, $D(x, s; \lambda)$ мен $D(\lambda)$ Фредгольм анықтауыштары деп аталады. Соңғы теңдіктерден

$$D(x, s; \lambda) = K(x, s) D(\lambda) + \lambda \int_a^b K(x, t) D(t, s; \lambda) dt.$$

Енді $D(\lambda)$ мен $D(x, s; \lambda)$ -лардың (55) пен (57) түріндегі жіктелген мәндерін соңғы теңдікке қойып, λ -нің бірдей дәрежелерінің коэффициенттерін салыстырсақ,

$$\begin{aligned} d_0(x, s) &= K(x, s), d_1(x, s) = K(x, s) d_1 - \int_a^b K(x, t) d_0(t, s) dt, \dots, \\ d_n(x, s) &= K(x, s) d_n - n \int_a^b K(x, t) d_{n-1}(t, s) dt, \dots, n = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (59)$$

рекуренттік өрнектерді аламыз.

өрнегін аламыз, бұдан (55) теңдігін пайдалансақ,

$$D'(\lambda) = - \int_a^b D(s, s; \lambda) ds.$$

Сонымен Фредгольм резольвентасы

$$R(x, s; \lambda) = \frac{1}{D(\lambda)} D(x, s; \lambda)$$

$f(x)$ функциясына тәуелді емес, бүтін аналитикалық функциялардың қатынасына тең, яғни λ бойынша мероморфты функция болады.

1-теорема. $D(\lambda)$ функциясының кез келген λ_0 түбірі резольвентаның полюсі болады.

λ_0 саны $D(\lambda)$ көпмүшелігінің k еселі түбірі, яғни

$$D(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k D_0(\lambda), \quad D_0(\lambda_0) \neq 0.$$

Ал $D'(\lambda)$ үшін λ_0 саны $k - 1$ еселі түбір. Енді λ_0 саны $D(x, s; \lambda)$ үшін l еселі түбір делік, яғни $D(x, s; \lambda) = (\lambda - \lambda_0)^l D(x, s; \lambda)$, $D(x, s; \lambda_0) \neq 0$ болсын.

Жоғарыдағы (60) формуланы пайдаланып,

$$D'(\lambda) = -(\lambda - \lambda_0)^l \int_a^b D_0(s, s; \lambda) ds$$

екенін көреміз. Бұл теңдеуден $l \leq k - 1$ екенін байқаймыз. Сондықтан λ_0 саны резольвентаның полюсі болады.

Ядроның резольвентасы бар болатындай λ саны регуляр сан, ал резольвентасы жоқ болатындай λ сандары меншікті мәндері (сандары) деп аталады. Меншікті сандар резольвентаның полюстерімен сай келеді немесе $D(\lambda)$ көпмүшелігінің түбірлері ($D(\lambda)$ бүтін функция болғандықтан түбірлері санақты жиыннан көп емес). Сонымен мына тұжырым орынды.

2-теорема. Егер $K(x, s)$ Фредгольмнің интегралдық теңдеуінің үзіліссіз ядросы болса, онда ол ядроның меншікті мәндері шексіздікте шоғырланатын санаулы жиыннан аспайды.

Мысалдар.

1. Фредгольмнің анықтауыштарын пайдаланып, $K(x, s) = \cos x - \cos s$, $(0 \leq x, s \leq 2\pi)$ ядросының резольвентасын анықтау керек.

Шешуі. $D(\lambda)$ -ны табайық. Ол үшін $D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} d_n$ екенін еске-рейік, мұндағы,

$$d_1 = \int_0^{2\pi} (\cos t - \cos s) ds = 0, d_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \begin{vmatrix} 0 & \cos t_1 - \cos t_2 \\ \cos t_2 - \cos t_1 & 0 \end{vmatrix} dt_1 dt_2 = 4\pi^2, \\ d_3 = 0, d_4 = 0, \dots$$

Сондықтан $D(\lambda) = 1 + \frac{1}{2!} (4\pi^2) \lambda^2 = 1 + 2\pi^2 \lambda^2$ олай болса,

$$D(x, s; \lambda) = K(x, s) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} d_n(x, s) \lambda^n,$$

ал

$$d_1(x, s) = \int_0^{2\pi} \begin{vmatrix} \cos x - \cos s & \cos x - \cos t_1 \\ \cos t_1 - \cos s & \cos t_1 - \cos t_1 \end{vmatrix} dt_1 = \pi(1 + 2\cos x \cos s), \\ d_2(x, s) = 0, d_3(x, s) = 0, \dots$$

Демек,

$$D(x, s; \lambda) = \cos x - \cos s - \lambda \pi(1 + \cos x \cos s), \\ R(x, s; \lambda) = \frac{1}{1 + 2\lambda^2 \pi^2} [\cos x - \cos s - \lambda \pi(1 + \cos x \cos s)]$$

2. Рекуренттік қатыстарды пайдаланып, $K(x, t) = 1 + xt$, $(0 \leq x, t \leq 1)$ ядросының резольвентасын есептейік.

Шешуі.

$$d_1 = \int_0^1 d_0(s, s) ds = \int_0^1 (1 + s^2) ds = \frac{4}{3},$$

$$d_1(x, t) = \frac{4}{3}(1 + xt) + \int_0^1 (1 + xt)(1 + st) ds = \frac{1}{3} - \frac{x+t}{2} + xt,$$

$$d_2 = \int_0^1 d_1(s, s) ds = \int_0^1 \left[\left(\frac{1}{3} \right) + s + s^2 \right] ds = \frac{1}{6},$$

$$d_2(x, t) = \frac{1}{6}(1 + xt) + \left(1 - \frac{s+t}{2} + st \right) + \dots = 0,$$

$$d_3 = 0, d_3(x, t) = 0, \dots$$

Сондықтан

$$D(\lambda) = 1 - \left(\frac{4}{3} \right) \lambda + \frac{\lambda^2}{12}, D(x, t, \lambda) = 1 + xt - \lambda \left(\frac{1}{3} \right) - \left(\frac{(x+t)}{2} + xt \right),$$

$$R(x, t, \lambda) = \frac{1 + xt - \lambda \left[\left(\frac{1}{3} \right) - \left(\frac{x+t}{2} \right) + xt \right]}{1 - \left(\frac{4}{3} \right) \lambda + \left(\frac{\lambda^2}{12} \right)}.$$

3. Фредгольмнің анықтауыштарын пайдаланып,

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 (2x-t)\varphi(t)dt + \frac{x}{6}$$

интегралдық теңдеуінің шешімін табайық.

Шешуі. Алдымен $D(\lambda)$ мен $D(x, s; \lambda)$ көпмүшеліктерін анықтаймыз:

$$d_1 = \int_0^1 (2s-s)ds = 0,5, \quad d_1(x, s) = 0,5(2x-s) - \int_0^1 (2x-s)(2s-t)dt = \\ = 1,5 - x - s + 2xs;$$

$$d_2(x, s) = \frac{1}{3}(2x-s) - 2 \int_0^1 (2x-t) \left(\frac{3}{2} - s - t + 2ts \right) dt = 0;$$

$$d_3 = 0, \quad d_3(x, s) = 0, \dots$$

Демек,

$$D(\lambda) = 1 - 0,5\lambda + \left(\frac{\lambda}{6}\right)^2, \quad D(x, s; \lambda) = 2x - s - \lambda \left[\frac{3}{2} - x - s + 2xs \right].$$

Егер $\lambda^2 - 3\lambda + 6 = 0$ болса, онда $\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{-15}}{2}$. Сонымен берілген теңдеудің шешімі

$$\varphi(x) = \frac{x}{6} + \lambda \int_0^1 \left[(2x-t) + \frac{\lambda \left[\frac{3}{2} - x - t + 2xt \right]}{1 - 0,5\lambda + \frac{1}{6}\lambda^2} \cdot \frac{t}{6} \right] dt = \frac{1}{6} \left[x + \frac{(6x+2)\lambda - \lambda^2 x}{\lambda^2 - 3\lambda + 6} \right], \\ \lambda \neq \frac{3 \pm \sqrt{-15}}{2}.$$

§4.4. Фредгольм теоремалары

Жоғарыдағы талқылаған мәселелер нәтижесінде келесі теоремаларды тұжырымдауға болады.

1-теорема (Фредгольмнің 1-теоремасы). Егер λ регуляр сан. Ал ядросы үзіліссіз

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)\varphi(s)ds + f(x) \quad (61)$$

біртекті емес интегралдық теңдеудің жалғыз ғана үзіліссіз шешімі бар болады, ол шешім

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b R(x, s, \lambda)f(s)ds + f(x)$$

формуласымен анықталады.

Бұл теоремадан салдар ретінде мынадай тұжырым шығады.

2-теорема. Егер λ регуляр сан болса, онда біртекті

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,s) \varphi(s) ds \quad (62)$$

теңдеудің тек нөлдік, яғни $\varphi(x) = 0$ шешуі ғана бар болады. Сондықтан егер біртекті (62) теңдеуінің нөлдік емес шешімі бар болса. Ол жағдай тек λ шектік сан болған жағдайда орындалады.

3-теорема. Егер λ_0 меншікті сан болса, онда біртекті (62) теңдеуінің $\varphi(x) \neq 0$ шешімі бар болады.

Дәлелдеуі. Меншікті λ_0 мән резольвентаның r еселі полюсі болсын, демек, резольвента

$$R(x,s,\lambda) = \frac{a_{-r}(x,s)}{(\lambda - \lambda_0)^r} + \frac{a_{-r+1}(x,s)}{(\lambda - \lambda_0)^{r-1}} + \dots + \frac{a_{-1}(x,s)}{\lambda - \lambda_0} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x,s)(\lambda - \lambda_0)^k$$

Лоран қатарына жіктелсін.

Мұндағы, $a_{-r}(x,s) \neq 0$. Интеграл теңдеуді $R(x,s,\lambda)$ үшін Лоран қатармен ауыстырып, одан кейін оның екі жағын $(\lambda - \lambda_0)^r$ көбейтіп, сонан соң $\lambda = \lambda_0$ деп алып,

$$a_{-r}(x,s) = \lambda \int_a^b K(x,t) a_{-r}(t,s) dt,$$

теңдігін аламыз, яғни теорема орынды.

Егер жоғарыдағы (61) теңдеуіне түйіндес

$$\psi(x) = \lambda \int_a^b K(s,x) \psi(s) ds + g(x)$$

теңдеуіне Фредгольм әдісін толығымен қайталасақ, оның да шешімін

$$\psi(x) = g(x) + \lambda \int_a^b R(s,x;\lambda) g(s) ds$$

түрінде анықтаймыз, мұндағы,

$$R(s,x;\lambda) = \frac{1}{D(\lambda)} D(s,x;\lambda).$$

Бұдан бөлшектің бөлімінде Фредгольм анықтауышы $D(\lambda)$ алымында x пен s -тің орындары ауысқан $D(s,x;\lambda)$ анықтауышы тұрғанын байқаймыз. Сондықтан түйіндес теңдеу мен жоғарыдағы (61) теңдеуінің меншікті сандары ортақ. Демек, мына тұжырым орынды.

4-теорема. Біртекті (62) интегралдық теңдеуі мен оған түйіндес

$$\psi(x) = \lambda \int_a^b K(s, x; \lambda) \psi(s) ds \quad (63)$$

теңдеуі пара-пар (олардың бірдей шешімдері бар болады немесе екеуінің де шешімі жоқ болады).

• **Ескерту.** Егер біртекті интегралдық теңдеу нөлдік емес бір $\varphi_0(x)$ шешімі бар болса, онда ол теңдеудің ақырсыз көп нөлдік емес шешімдері бар болады, себебі $c\varphi_0(x)$ сол теңдеудің шешімі болады, мұнда c – кез келген тұрақты шама.

Біртекті интегралдық теңдеудің меншікті мәні λ санына сәйкес сызықты тәуелсіз шешімдерінің саны ол мәnnің рангісі деп аталады. λ меншікті мән болсын, ал $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$ функциялары сол меншікті мәнге сәйкес сызықты тәуелсіз меншікті функциялар болсын, яғни (62) теңдеуінің λ -ға сәйкес нөлдік емес шешімдері

$$\varphi_j(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi_j(s) ds \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

болып жазылсын.

Меншікті функциялардан тұрақты коэффициенттер арқылы түзілген сызықты комбинация да меншікті функция болғандықтан, бұл функцияларға ортогональдау үдерісін қолдануға болады. Демек, меншікті функцияларды ортогональ және нормаланған деп айтуға болады.

Соңғы теңдікті

$$\frac{1}{\lambda} \varphi_j(x) = \int_a^b K(x, s) \varphi_j(s) ds \quad (j = 1, 2, \dots, m).$$

түрінде көшіріп жазайық. Міне, бұл өрнектің сол жағы $K(x, s)$ -тің ортонормаланған меншікті функциялар жүйесі бойынша түзілген Фурье коэффициенті екенін көреміз. Бессель теңсіздігі бойынша

$$\sum_{j=1}^m \frac{1}{\lambda^2} |\varphi_j(x)|^2 \leq \int_a^b |K(x, s)|^2 ds,$$

ал бұл өрнектің екі жағын x бойынша a -дан b -ға дейін интегралдап,

$$\sum_{j=1}^m \frac{1}{\lambda^2} \leq \int_a^b \int_a^b |K(x, s)|^2 dx ds$$

теңсіздігінен, одан кейін

$$m \leq \lambda \left| \int_a^b \int_a^b |K(x, s)|^2 dx ds \right|$$

өрнегін аламыз. Бұл теңсіздік λ меншікті санына сәйкес сызықты тәуелсіз функциялар саны m соңғы теңсіздіктің оң жағынан (ақырлы саннан) аспайтынын көрсетеді. Нәтижеде мына тұжырым орынды.

5-теорема. Кез келген меншікті мәнге сәйкес сызықты тәуелсіз функциялар саны ақырлы, яғни кез келген меншікті санның рангісі шектелген.

6-теорема. Фредгольмнің 2 теоремасы біртекті (62) интегралдық теңдеуімен оған түйіндес теңдеулердің сандары бірдей сызықты тәуелсіз шешімдері бар болады; яғни ортақ меншікті сандардың рангілері бірдей.

Дәлелдеуі. Теореманы қарсы жорып дәлелдейік. (62) теңдеуінің меншікті мәні λ -нің рангі m , ал (63) теңдеуіндегі меншікті мәнінің рангі n ($m < n$) болсын. $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$ және $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_m(x)$ функциялары сәйкес түрде (62) және (63) теңдеулерінің сызықты тәуелсіз шешімдері делік. Жоғарыда айтқандай, бұл жерде де ол шешімдерді ортонормаланған деп аламыз.

Жаңадан ядро түзейік:

$$L(x, s) = K(x, s) - \sum_{j=1}^m \varphi_j(s) \psi_j(x) \quad (64)$$

және мына екі өзара түйіндес теңдеулерді жазайық:

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b L(x, s) \varphi(s) ds, \quad \psi(x) = \lambda \int_a^b L(s, x) \psi(s) ds,$$

(64) ядросына байланысты бұл теңдеулерді

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds - \lambda \sum_{j=1}^m \int_a^b \varphi_j(s) \psi_j(x) \varphi(s) ds, \quad (65)$$

$$\psi(x) = \lambda \int_a^b K(s, x) \psi(s) ds - \lambda \sum_{j=1}^m \varphi_j(x) \int_a^b \psi_j(s) \psi(s) ds \quad (66)$$

түрінде жазайық. $\varphi(x)$ функциясы (65) теңдеуінің шешімі болсын. Теңдеудің екі жағын да $\psi_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, m$) функциясына көбейтіп, нәтижелерді x бойынша a -дан b -ға дейін интегралдап,

$$\int_a^b \varphi(x) \psi_k(x) dx = \int_a^b \left[\lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds \right] \psi_k(x) dx - \lambda \sum_{j=1}^m \int_a^b \varphi_j(s) \varphi(s) ds \int_a^b \psi_j(x) \psi_k(x) dx$$

теңдеуін аламыз.

Егер біз $\psi_k(x)$ функциялары

$$\lambda \int_a^b K(x, s) \psi_k(s) ds = \psi_k(x) \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

теңдеулерінің шешімдері екенін және олардың ортонормаланғанын еске алсақ, алдыңғы теңдеуді

$$\int_a^b \varphi(x) \psi_k(x) dx = \int_a^b \psi_k(s) \varphi(s) ds - \lambda \int_a^b \varphi_k(s) \varphi(s) ds$$

түрінде жазамыз. Бұдан $\lambda \neq 0$ екенін ескеріп,

$$\int_a^b \varphi_k(s) \varphi(s) ds = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad (67)$$

өрнегін аламыз. Демек, (67) шарттарын пайдаланып, (65) теңдеуін

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds$$

түрінде жазамыз. Бұдан біз (65) теңдеуінің кез келген шешімі (62) теңдеуін де қанағаттандыратынын көреміз. Олай болса, $\varphi(x)$ шешімі сызықты тәуелсіз шешімдердің сызықты комбинациясы ретінде, яғни

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^m c_j \varphi_j(x)$$

түрінде өрнектеледі екен.

Енді барлық $c_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$) екенін көрсетейік. Ол үшін теңдіктің екі жағында $\varphi_k(x)$ -ке көбейтіп, нәтижені x бойынша a -дан b -ға дейін интегралдап,

$$\int_a^b \varphi(x) \varphi_k(x) dx = \sum_{j=1}^m c_j \int_a^b \varphi_j(x) \varphi_k(x) dx = c_k \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

қатысын аламыз. Бұдан (67) өрнектерін ескеріп, $c_k = 0$ ($k = 1, 2, \dots, m$) екенін шығарамыз. Сонымен $\varphi \equiv 0$, яғни біртекті теңдеудің тек нөлдік шешімі ғана бар болатынын көреміз.

Енді түйіндес теңдеудің нөлге тең емес шешімі бар болатынын көрсетейік. (66) теңдеуінде $\psi(x) = \psi_k(x)$ ($k > m$) деп алып және $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x)$ ортогональ функциялар жүйесі екенін ескеріп, оның үстіне

$$\psi_k(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) \psi_k(s) ds$$

екенін пайдаланып,

$$\psi_k(x) = \lambda \int_a^b L(x, s) \psi_k(s) ds \quad (k > m)$$

теңдігін аламыз, яғни $\psi_k(x) \neq 0$ түйіндес теңдеудің шешімі. Демек, нәтижеде 3-теоремаға қайшы тұжырымға келеміз. Бұл қайшылық $m < n$ болуы мүмкін емес-тігін көрсетеді. Дәл осылай $m > n$ жағдайының да мүмкін болмайтынын дәлелдей аламыз. Сондықтан $m = n$, демек, Фредгольмнің 2 теоремасы дәлелденді.

Енді, λ ядроның меншікті мәні болған жағдайда, біртекті емес (61) теңдеуін зерттейміз. (61) теңдеуінің шешімі бар, оны $\varphi(x)$ деп қабылдайық. Теңдеудің екі жағын да сәйкес түйіндес теңдеудің меншікті функциялары $\psi_k(x)$ -ке көбейтіп, одан кейін x бойынша a -дан b -ға дейін интегралдап,

$$\int_a^b \varphi(x) \psi_k(x) dx = \int_a^b \varphi(s) \left[\lambda \int_a^a K(s, x) \psi_k(x) dx \right] ds + \int_a^b f(x) \psi_k(x) dx,$$

өрнегін аламыз. Бұл жерде (63) теңдеуін пайдалансақ,

$$\int_a^b \varphi(x) \psi_k(x) dx = \int_a^b \varphi(s) \psi(s) ds + \int_a^b f(x) \psi_k(x) dx,$$

Бұдан

$$\int_a^b f(x) \psi_k(x) dx = 0 \quad (k = 1, 2, \dots) \tag{68}$$

шығады. Демек, (61) теңдеуінің шешілуі үшін $f(x)$ функциясы (68) шартын қанағаттандыруы қажет, бұл шарттағы $\psi_k(x)$ түйіндес функцияның λ меншікті мәніне сәйкес функциялар. Енді осы (68) шарттарының жеткілікті де болатынын көрсетейік. (68) шарты орынды деп қабылдайық. $L(x, s)$ ядросын (64) формуласы бойынша түземіз.

Біз жоғарыда λ саны бұл ядроның меншікті мәні емес екенін көрдік, демек,

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b L(x, s) \varphi(s) ds \tag{69}$$

теңдеуінің шешуі бар. Бұл теңдеуді мына

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds - \lambda \sum_{j=1}^m \psi_j(x) \int_a^b \varphi(s) \varphi_j(s) ds$$

түрінде жазып, оның екі жағын да $\psi_k(x)$ функциясына көбейтіп, одан кейін x бойынша a -дан b -ға дейін интегралдап,

$$\int_a^b \varphi(x) \psi_k(x) dx = \int_a^b f(x) \psi_k(x) dx + \lambda \int_a^b \varphi(s) \psi_k(s) ds - \lambda \int_a^b \varphi(s) \varphi_k(s) ds$$

өрнегін аламыз. Бұдан (68) шартын пайдаланып,

$$\int_a^b \varphi(s) \varphi_k(s) ds = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m)$$

екенін көреміз.

Сонымен (61) теңдеуге келтірілді, яғни (69) теңдеудің шешімі $\varphi(x)$ (61) теңдеудің шешімі екен. Демек, (68) шарттары жеткілікті екенін дәлелдедік. Егер осы шарттар орындалса, онда біртекті емес (61) теңдеудің жалпы шешімі қандай да бір дербес $\varphi_0(x)$ шешімі мен біртекті теңдеудің жалпы шешімінің қосындысынан тұрады:

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \sum_{j=1}^m c_j \varphi_j(x),$$

мұндағы, c_j – тұрақты шамалар. Сөйтіп, бұл жағдайда (61) теңдеуінің акырсыз көп шешімдері бар болады. Дербес $\varphi_0(x)$ шешімін $L(x, s)$ ядросының резольвентасы арқылы анықтайды.

Міне, бұл талқылаулар нәтижесінде мына тұжырымды дәлелдедік.

7 теорема. (Фредгольмның теоремасы). Егер λ параметр (61) теңдеуінің меншікті мәні болса, онда ол теңдеудің шешілуі үшін сол теңдеудегі $f(x)$ бос мүшесі (68) шартын қанағаттандыруы қажетті де, жеткілікті. (68) өрнектеріндегі $\psi_k(x)$ функциялары (61) теңдеуіне түйіндес біртекті теңдеудің меншікті функциялары. Егер (68) шарттар орындалса, онда (61) теңдеуінің акырсыз көп жиынды шешімі бар болады да олар соңғы формуламен өрнектеледі.

Сонымен дәлелденген теоремаларды былай қорытындылауға болады.

1. Егер Фредгольмның біртекті интегралдық теңдеуінің тек нөльдік шешімі ғана бар болса, онда оған сәйкес біртекті емес интегралдық теңдеудің кез келген бос мүше $f(x)$ үшін жалғыз ғана шешімі бар болады.

2. Берілген біртекті интегралдық теңдеу мен оның түйіндес интегралдық теңдеуінің шешімдері бірдей нөлге тең немесе нөлге тең емес болады. Бұған қоса олардың меншікті мәндерінің рангтері бірдей болады.

3. Біртекті интегралдық теңдеудің нөлге тең емес шешімдері бар болған жағдайда, біртекті емес интегралдық теңдеудің шешімі бар болуы үшін оның бос мүшесі түйіндес интегралдық меншікті функцияларымен ортогональ болуы қажетті де, жеткілікті.

5. СИММЕТРИЯЛЫҚ ИНТЕГРАЛДЫҚ ТЕНДЕУЛЕР

§ 5.1. Симметриялық ядролар және олардың кейбір қасиеттері

$L_2[a, b]$ кеңістігінде

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds + f(x)$$

интегралдық теңдеуін қарастырайық. Егер нақты ядро $K(x, s) = K(s, x)$ шартын қанағаттандырса, оны симметриялық ядро деп атайды. Мысалы, $K(x, s) = \cos(x + s)$, $K(x, s) = xs + 3x^2s^2$ симметриялық ядролар. Комплекстік $K(x, s)$ ядросы $K(x, s) = \overline{K(s, x)}$ шартын қанағаттандырса, оны симметриялық эрмиттік ядро деп атайды. Ядросы симметриялық ядро болатын интегралдық теңдеуді симметриялық интегралдық теңдеу деп айтады.

Егер $K(x, s)$ симметриялық эрмиттік ядро болса, онда бұл ядроның қайталанған ядроласы симметриялық болады. Расында, қайталанған ядро анықтамасы бойынша

$$\begin{aligned} K_2(x, s) &= \int_a^b K(x, t) K(t, s) dt = \int_a^b K(t, s) K(x, t) dt = \int_a^b \overline{K(s, t)} \cdot \overline{K(t, x)} dt = \\ &= \int_a^b \overline{K(s, t) K(t, x)} dt = \overline{K_2(s, x)}. \end{aligned}$$

Дәл осылай жалпы жағдай үшін де бұл қасиеттің орынды екенін оңай көруге болады.

Егер $K(x, s)$ симметриялық эрмиттік ядро болса, онда Фредгольм операторы

$$K\varphi = \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds$$

өзіне түйіндес, яғни $K(x, s) = K^*$ болады. Расында

$$K^* \varphi = \int_a^b \overline{K(s, x)} \varphi(s) ds = \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = K\varphi.$$

Біз бұдан былай нақты аргументті симметриялық ядроларды қарастырамыз.

§ 5.2. Симметриялық ядролы интегралдық теңдеулердің негізгі қасиеттері

1-теорема. Симметриялық ядролы интегралдық теңдеуінің әртүрлі меншікті мәндеріне сәйкес келетін меншікті функциялар өзара ортогональ.

Дәлелдеу. Симметриялық $K(x,s)$ ядроның меншікті мәндері λ_1 мен λ_2 ($\lambda_1 \neq \lambda_2$), ал $\varphi_1(x)$ пен $\varphi_2(x)$ оларға сәйкес меншікті функциялар болсын. Онда $\varphi_1 = \lambda_1 K \varphi_1$, $\varphi_2 = \lambda_2 K \varphi_2$ теңдеулері орынды. Бірінші теңдеуді $\varphi_2(x)$, ал екіншіні $\varphi_1(x)$ функциясына көбейткеннен соң олардың айырымын интегралдап,

$$\frac{1}{\lambda_1}(\varphi_1, \varphi_2) - \frac{1}{\lambda_2}(\varphi_1, \varphi_2) = (K \varphi_1, \varphi_2) - (K \varphi_2, \varphi_1) = 0$$

теңдікті аламыз немесе

$$\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) (\varphi_1, \varphi_2) = 0.$$

Бұл теңдеудегі $\lambda_1 \neq \lambda_2$ болғандықтан, ол тек $(\varphi_1, \varphi_2) = 0$ болған жағдайда ғана орынды. Теорема дәлелденді.

2-теорема. Симметриялық ядроның меншікті мәндері нақты сандар болады.

Дәлелдеуі. Меншікті $\varphi_0(x) \neq 0$ функциясына сәйкес меншікті мән $\lambda_0 = \alpha + i\beta$ ($\beta \neq 0$) – комплекс сан деп ұйғарайық. Сонда $\varphi_0(x) = \lambda_0 K \varphi_0$ теңдігі орынды. $\overline{\varphi_0(x)}$ меншікті функциясының меншікті мәні $\overline{\lambda_0}$ болатынын, яғни $\overline{\varphi_0(x)} = \overline{\lambda_0} K \overline{\varphi_0}$ теңдігі орынды екенін оңай байқауға болады. 1 теоремадан $\lambda_0 \neq \overline{\lambda_0}$ болғандықтан, $\int_a^b \varphi_0(x) \overline{\varphi_0(x)} dx = 0$, демек, $\varphi_0(x) = 0$. Сонымен $\alpha + i\beta$ саны $\varphi_0(x)$ функциясының меншікті мәні бола алмайды.

• **Ескерту.** Меншікті функциялардың әрқайсысының нормасын бөліп нормалауға болады. Одан кейін, егер бір меншікті мәнге бірнеше сызықты тәуелсіз меншікті функциялар сәйкес келсе, онда оларды Шмидтің ортогональдау әдісін қолданып, өзара ортогональдауға және нормалауға болады. 1 теоремадан әртүрлі меншікті мәндерге сәйкес меншікті функциялар өзара ортогональ екенін көргенбіз.

Демек, симметриялық ядроның меншікті функциялары жиынын ортонормаланған система деп есептеуге болады. Бұдан былай, бір меншікті мәнге бірнеше сызықты тәуелсіз меншікті функциялар сәйкес келетін жағдайда, меншікті мәндер тізбегін жазарда, сол меншікті мәнге қанша меншікті функция сәйкес келсе, сонша қайталап жазамыз. Бұдан кейін әрбір меншікті мәнге жалғыз меншікті функция сәйкес келеді деп айта аламыз. Сонымен қатар келешекте меншікті мәндерді абсолют шамалары бойынша өсетіндей етіп реттеп жазамыз.

Егер меншікті мәндер ақырсыз көп болса, онда Фредгольм теоремасы бойынша олардың шексіздікте шектік нүктелері болуы мүмкін, сондықтан $n \rightarrow \infty$ жағдайында $\lambda_n \rightarrow \infty$ болады.

1-лемма. Екінші қайталанған ядроның меншікті мәндері жиыны сол ядроның меншікті мәндері квадраттарының жиынынан тұрады.

Дәлелдеуі. $K(x,s)$ ядросының меншікті мәні λ_0 -ге сәйкес меншікті функциясы $\varphi_0(x)$ болсын, сонда $\varphi_0(x) = \lambda_0 K \varphi_0$ теңдігі орынды.

Бұл теңдікке $\lambda_0 K$ операторын қолданып, $\lambda_0 K \varphi_0 = \lambda_0^2 K^2 \varphi_0$ теңдеуін аламыз. Одан кейін осы теңдеулерден

$$\varphi_0(x) = \lambda_0^2 K^2 \varphi_0 = \lambda_0^2 \int_a^b K_2(x,s) \varphi_0(s) ds$$

теңдеуі шығады. Бұл соңғы теңдеуден λ_0^2 саны $K_2(x,s)$ ядросының $\varphi_0(x)$ меншікті функциясына сәйкес меншікті мәні екенін көреміз.

Екінші жағынан, $K_2(x,s)$ ядросының меншікті мәні μ_0 , ал $\varphi_0(x)$ оған сәйкес меншікті функциясы болсын, яғни $\varphi_0 - \mu_0 K^2 \varphi_0 = 0$ шарты орындалсын. Бұл соңғы теңдеуді

$$(I + \sqrt{\mu_0} K)(I - \sqrt{\mu_0} K) \varphi_0 = 0 \quad (70)$$

түрінде жазып және $\psi(x) = (I - \sqrt{\mu_0} K) \varphi_0$ деп белгілейік. Мұнда $\psi \equiv 0$ болуы мүмкін. Бұл жағдайда $\sqrt{\mu_0}$ шамасы $K(x,s)$ ядросының φ_0 меншікті функциясына сәйкес меншікті мәні болады. Демек, бұл жағдайда лемма дәлелденеді.

Егер $\psi \neq 0$ болса, (70) теңдеуінен $(I + \sqrt{\mu_0} K) \psi = 0$ екені шығады. Бұдан $\sqrt{\mu_0}$ шамасы $K(x,s)$ ядросының меншікті мәні, ал $\psi(x)$ оған сәйкес меншікті функция. Лемма бұл жағдайда да дәлелденді.

1-лемманың салдары. Егер $K(x,s)$ симметриялық ядро болса, онда қайталанушы ядроның меншікті мәндері оң.

Ескерту. Дәл осылай қайталанған $K_n(x,s)$ ядросының меншікті мәндерінің жиынына $K(x,s)$ ядросының n -дәрежелі меншікті мәндері жиыны дәл келеді.

3-теорема. Кез келген симметриялық ядроның кемінде бір меншікті мәні бар болады.

Дәлелдеуі. Қайталанған $K_2(x,s)$ ядросының кемінде бір меншікті мәні бар екенін дәлелдейік, онда жоғарыда лемма бойынша $K(x,s)$ -тің да меншікті мәні бар болады.

Қайталанған ядро $K_2(x,s)$ -тің λ жазықтығының $|\lambda| \leq \mu$ болатындай облысында меншікті мәні жоқ болсын (мұндағы, μ – кез келген оң сан). Кез келген $\varphi(x) \neq 0$ функциясын алып, жаңадан

$$f(x) = \varphi(x) - \mu K^2 \varphi = \varphi(x) - \mu \int_a^b K_2(x,s) \varphi(s) ds \quad (71)$$

функциясын құрамыз. Әрине, $f(x) \neq 0$. Қарсы жағдайда, яғни $f(x) \equiv 0$ болса, $K_2(x,s)$ ядросының меншікті мәні μ болар еді де теорема дәлелденеді. Сондықтан, (71) теңдеуін бос мүшесі $f(x) \neq 0$, ал белгісіз функциясы $\varphi(x) \neq 0$ болған 2-текті интегралдық теңдеу ретінде қарастырамыз. Бұл теңдеудің шешімі

$$\varphi(x) = f(x) + \mu \int_a^b R_2(x,s; \mu) f(s) ds,$$

мұндағы, $R(x,s; \lambda)$ жоғарыдағы (71) теңдеудегі $K_2(x,s)$ ядросының резольвентасы. Бұл теңдіктің екі жағын да $f(x)$ функциясына скаляр көбейтсек,

$$(\varphi, f) = \|f\|^2 + \mu \int_a^b \int_a^b R_2(x,s; \mu) f(s) f(x) ds dx \quad (72)$$

теңдігі шығады. Жоғарыда біз $K_2(x,s)$ ядросының $|\lambda| \leq \mu$ дөңгелегі ішінде меншікті мәні жоқ деп ұйғардық, олай болса, $R_2(x,s; \mu)$ резольвентасы μ -ға қатысты бүтін функция, яғни оны

$$R_2(x,s; \mu) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^{n-1} K_2(x,s)$$

түрінде өрнектеуге болады. Бұл жағдайда (72) теңдігіндегі интеграл

$$\int_a^b \int_a^b R_2(x,s; \mu) f(x) f(s) ds dx = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mu^{n-1}$$

болып жазылады.

Мұндағы,

$$\alpha_n = \int_a^b \int_a^b K_{2n}(x,s) f(s) f(x) ds dx$$

Енді осы α_n оң сан екенін көрсетейік. Соңғы өрнектен $\alpha = (K^{2n} f, f) = (K^n(K^n f, f)) = (K^n f, K^n f) = \|K^n f\|^2 \geq 0$. Олай болса, (72) теңдігінен

$$(\varphi, f) = \|f\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n \|K^n f\|^2$$

және бұдан $(\varphi, f) > 0$ екені шығады, демек (71) теңдігінен

$$\|K\varphi\| \leq \frac{1}{\sqrt{\mu}} \|\varphi\|, \quad \forall \varphi(x) \in L_2[a, b]. \quad (73)$$

Енді $K_2(x,s)$ ядросының ешқандай меншікті мәні жоқ деп ұйғарайық. Бұл жағдайда μ санын жеткілікті мөлшерде үлкен етіп, яғни $\mu \rightarrow \infty$ деп алуға болады. Олай болса, (73) теңсіздігінен $\|K\varphi\|=0$, яғни $\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds=0$ болады. Бұндай кезде $K(x,s)\equiv 0$ екенін дәлелдеу қиын емес. Расында, x -ті тұрақтылап, $\varphi(s)=K(x,s)$ деп алсақ,

$$\int_a^b |K(x,s)|^2 ds = 0$$

екені шығады, яғни $K(x,s)\equiv 0$. Сонымен, егер $K_2(x,s)$ ядросының бірде-бір меншікті мәні жоқ болса, онда $K(x,s)\equiv 0$. Демек, егер $K(x,s)\neq 0$ болса, онда $K_2(x,s)$ қайталанушы ядросының кемінде бір меншікті мәні бар болады. Бұл жағдайда жоғарыдағы лемма бойынша $K(x,s)$ ядросының да кемінде бір меншікті мәні бар болады. 3-теорема дәлелденді.

Ескерту. (73) теңсіздігі $K_2(x,s)$ ядросының меншікті мәні жоқ болатын $|\lambda|\leq \mu$ дөңгелегі ішінде орынды, басқаша айтқанда, ол μ саны $K(x,s)$ ядросының ең кіші меншікті мәнінен аз болғанда қанағаттанады.

$K(x,s)$ ядросының модуль шамасы бойынша ең кіші меншікті мәні λ_1 болсын, сонда λ_1^2 саны $K_2(x,s)$ ядросының меншікті мәні болады. Егер $\mu < \lambda_1^2$ болса, (73) теңсіздігі орынды. Сол (73) теңсіздігінен $\mu \rightarrow \lambda_1^2$ болғанда

$$\|K\varphi\| \leq \frac{1}{|\lambda_1|} \|\varphi\|.$$

Бұл теңсіздікте теңдік қатысы $K(x,s)$ ядросының λ_1 меншікті мәніне сәйкес $\varphi_1(x)$ меншікті функциясы үшін орындалады. Расында, бұл жағдайда $\varphi_1 = \lambda K\varphi_1$. Бұдан:

$$K\varphi_1 = \frac{1}{\lambda_1} \varphi_1(x), \quad \|K\varphi_1\| = \frac{1}{|\lambda_1|} \|\varphi_1\| \Rightarrow \|K\| = \frac{1}{|\lambda_1|}.$$

4-теорема. Егер $K(x,s)$ симметриялық ядро болса, онда оның меншікті мәні сол ядро резольвентасының қарапайым полюсі болады.

Дәлелдеуі. Қарсы жориық, яғни λ_0 меншікті мән $R(x,s;\lambda)$ резольвентасының r ($r > 1$) ретті полюсі болсын. Онда $R(x,s;\lambda)$ Лоран қатарына жіктеледі.

$$R(x,s;\lambda) = \frac{\varphi_r(x,s)}{(\lambda - \lambda_0)^r} + \frac{\varphi_{r-1}(x,s)}{(\lambda - \lambda_0)^{r-1}} + \dots + \frac{\varphi_1(x,s)}{\lambda - \lambda_0} + \sum_{\kappa=0}^{\infty} C_{\kappa}(x,s)(\lambda - \lambda_0)^{\kappa}. \quad (74)$$

Мұндағы, $\varphi_r(x,r) \neq 0$. Резольвента:

$$\begin{aligned}
R(x, s; \lambda) &= K(x, s) + \lambda \int_a^b K(x, t) R(t, s; \lambda) dt = \\
&= K(x, s) + \lambda_0 \int_a^b K(x, t) R(t, s; \lambda) dt + (\lambda - \lambda_0) \int_a^b K(x, t) R(t, s; \lambda) dt
\end{aligned}$$

интегралдық теңдеуді қанағаттандырады.

$R(x, s; \lambda)$ орнына (74) теңдігінің оң жағын қойып, одан кейін алынған өрнектің екі жағындағы көпмүшеліктердегі $\lambda - \lambda_0$ айырымы коэффициенттерін теңестіріп,

$$\begin{aligned}
\varphi_r(x, s) &= \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi_r(t, s) dt, \\
\varphi_{r-1}(x, s) &= \lambda_0 \int_a^b K(x, t) \varphi_{r-1}(t, s) dt + \int_a^b K(x, t) \varphi_r(t, s) dt
\end{aligned} \tag{75}$$

теңдіктерін аламыз. Бұл теңдіктердің біріншісін $\varphi_{r-1}(x, s)$ -ке, ал екіншісін $\varphi_r(x, s)$ -ке көбейтіп, одан кейін алынған нәтижелерді қоссақ,

$$\begin{aligned}
0 &= \lambda_0 \varphi_{r-1}(x, s) \int_a^b K(x, t) \varphi_r(t, s) dt - \lambda_0 \varphi_r(x, s) \int_a^b K(x, t) \varphi_{r-1}(t, s) dt + \\
&+ \varphi_r(x, s) \int_a^b K(x, t) \varphi_r(t, s) dt
\end{aligned}$$

теңдігі шығады. Мұны x бойынша a -дан b -ға дейін интегралдасақ және ядроның симметриялығын пайдалансақ, онда

$$\int_a^b \varphi_r(x, s) \left(\int_a^b K(x, t) \varphi_r(t, s) dt \right) dx = 0,$$

одан кейін бұл өрнекке (75) теңдігін қолдансақ,

$$\frac{1}{\lambda_0} \int_a^b \varphi_r^2(x, s) dx = 0$$

немесе барлық жерде дерлік $\varphi_r(x, s) = 0$ екені шығады. Демек, $\varphi_r(x, s) \neq 0$ деген шартқа кері қорытынды алдық. Міне, бұл қайшылық теореманың орынды екенін дәлелдейді.

5-теорема. Әрбір шектелген интервалда $D(\lambda) = 0$ теңдеуінің ақырлы санды түбірлері бар болады.

Дәлелдеуі. Қарсы жориық, яғни $[A_1, A_2]$ кесіндісінде $D(\lambda) = 0$ теңдеуінің ақырсыз көп түбірлері жиыны $\{\lambda_k\}$ бар деп ұйғарайық. Әрбір $\tilde{\lambda}_k$ түбіріне $\tilde{\varphi}_k$ меншікті функциясы сәйкес келетіні, олардың

$$(\tilde{\varphi}_\kappa, \tilde{\varphi}_m) = \begin{cases} 0, & \kappa \neq m, \\ 1, & \kappa = m; \end{cases} \quad \tilde{\varphi}_\kappa(x) = \tilde{\lambda}_\kappa \int_a^b K(x,s) \tilde{\varphi}_\kappa(s) ds$$

шарттарын қанағаттандыратыны белгілі. Соңғы теңдіктен $\frac{\tilde{\varphi}}{\lambda}$ өрнегі $K(x,s)$ ядросының $\tilde{\varphi}_\kappa(s)$ ортонормаланған жүйесі бойынша Фурье коэффициенттері екенін көреміз. Бессель теңсіздігін пайдаланып,

$$\sum_{k=1}^p \frac{1}{\tilde{\lambda}_k^2} \tilde{\varphi}_k^2(x) \leq \int_a^b K^2(x,s) ds$$

теңсіздігін аламыз. Бұдан x бойынша a -дан b -ға дейін интегралдасақ,

$$\sum_{k=1}^p \frac{1}{\tilde{\lambda}_k^2} \leq \int_a^b \int_a^b K^2(x,s) ds dx$$

Ал $\tilde{\lambda}_k^2 \leq A_k^2$ болғандықтан, соңғы теңсіздіктер

$$\sum_{k=1}^p \left(\frac{1}{A_k^2} \right) \leq \sum_{k=1}^p \left(\frac{1}{\tilde{\lambda}_k^2} \right) \leq \int_a^b \int_a^b K^2(x,s) dx ds = \|K\|^2 < \infty.$$

Егер $p \rightarrow \infty$ болса, соңғы теңсіздіктің сол жағы кез келген шамадан үлкен бола алады, сондықтан бұл теңсіздік орындалмайды. Міне, бұл қайшылық теореманы дәлелдейді.

§ 5.3. Ядроны қатарға жіктеу

Симметриялық $K(x,s)$ ядросын қарастырайық. Оның меншікті мәндері $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$, ал меншікті функциялары $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ болсын. Меншікті функциялар ортонормаланған, ал меншікті мәндер абсолют шамаларының өсу ретімен орналасқан болсын. Жаңадан

$$K^{(n)}(x,s) = K(x,s) - \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j} \varphi_j(x) \varphi_j(s) \quad (76)$$

симметриялық ядросын құрайық.

4-лемма. $\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \dots, \lambda_{n+k}, \dots; \varphi_{n+1}(x), \dots, \varphi_{n+2}(x), \dots, \varphi_{n+k}(x), \dots$ тізбектері симметриялық $K^{(n)}(x,s)$ ядросының меншікті мәндері мен оларға сәйкес меншікті функциялары болады.

Дәлелдеуі. $m > n$ болсын. Бірінші тізбектен λ_m -ді, ал екінші тізбектен оған сәйкес келуші $\varphi_m(x)$ функциясын алып,

$$\alpha(x) = \varphi_m(x) - \lambda_m \int_a^b K^{(n)}(x,s) \varphi_m(s) ds$$

өрнегін құрайық. Енді $K^{(n)}(x,s)$ ядросын (76) өрнегімен ауыстырып,

$$\alpha(x) = [\varphi_m(x) - \lambda_m \int_a^b K(x,s) \varphi_m(s) ds + \lambda_m \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j} \varphi_j(x) \int_a^b \varphi_m(s) \varphi_j(s) ds$$

теңдігін аламыз.

$\{\varphi_m(x)\}$ функциялары жүйесі ортонормаланғандықтан,

$$\int_a^b \varphi_m(s) \varphi_j(s) ds, (m \neq j).$$

Демек, $\alpha(x) = 0$, яғни $\varphi_m(x) = \lambda_m \int_a^b K^{(n)}(x,s) \varphi_m(s) ds$, олай болса, $m > n$ жағдайында λ_m мен $\varphi_m - K^{(n)}(x,s)$ ядросының меншікті мәні мен меншікті функциясы.

Керісінше, егер $K^{(n)}(x,s)$ ядросы үшін μ саны мен $\psi(x)$ функциясы меншікті мән мен меншікті функция болса, онда олар $K(x,s)$ ядросының меншікті мәндері мен меншікті функцияларының жиындарынан табылады. Ұйғарым бойынша μ мен $\psi(x)$

$$\psi(x) = \mu \int_a^b K^{(n)}(x,s) \psi(s) ds$$

теңдеуін қанағаттандырады. Бұл теңдіктегі $K^{(n)}(x,s)$ ядросын (76) өрнегі бойынша ауыстырсақ,

$$\psi(x) - \mu \int_a^b K(x,s) \psi(s) ds + \mu \sum_{j=1}^n \frac{\psi_j(x)}{\lambda_j} \int_a^b \psi(s) \varphi_j(s) ds = 0. \quad (77)$$

Бұл теңдеудің екі жағын да $\varphi_l(x) (l = 1, \bar{n})$ функциясынан скаляр көбейтіп,

$$(\psi, \varphi_l) - \mu (K \psi, \varphi_l) + \mu \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j} (\psi, \varphi_j) (\varphi_j, \varphi_l) = 0$$

теңдеуіне келеміз. $K(x,s)$ ядросының симметриялық және $\{\varphi_j(x)\}$ функцияларының ортонормаланған қасиетін ескерсек,

$$(K \psi, \varphi_l) = (\psi, K \varphi_l) = (\psi, \frac{1}{\lambda_l} \varphi_l) = \frac{1}{\lambda_l} (\psi, \varphi_l),$$

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j} (\psi, \varphi_j)(\varphi_j, \varphi_l) = \frac{1}{\lambda_l} (\psi, \varphi_l)$$

өрнектерін аламыз. Бұл жағдайда алдыңғы теңдеуден $(\psi, \varphi_l) = 0, (l = 1, 2, \dots, n)$ ортогональдық шарты шығады. Онда (77) теңдеуі

$$\psi(x) - \mu \int_a^b K(x, s) \psi(s) ds = 0$$

түрінде жазылады. Бұл теңдеуден μ мен $\psi(x) - K(x, s)$ ядросының меншікті мәні мен меншікті функциясы екенін, ал $\psi(x)$ -тің $\varphi_j(x) (j = 1, \dots, n)$ функция-ларымен ортогональ болғандықтан $m > n$ ретті меншікті функциялардың біреуімен сай келетінін көреміз.

Салдар. Егер $K(x, s)$ ядросының n -нен көп меншікті мәні бар болса, онда $K^{(n)}(x, s)$ ядросының меншікті мәндерінің модулі бойынша ең кішісі λ_{n+1} болады.

Берілген ядроның меншікті мәндері $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ақырлы санды болған жеке жағдайды қарастырайық. Онда $K^{(n)}(x, s)$ ядросының бірде-бір меншікті мәні болмайды. Бұндай жағдайда бұрын дәлелденген теорема бойынша $K^{(n)}(x, s) = 0$ немесе

$$K(x, s) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\lambda_j} \varphi_j(x) \varphi_j(s).$$

Осы формуладан $K(x, s)$ ядросының ерекшеленген ядро екенін көреміз. Кез келген ерекшеленген ядроның ақырлы санды меншікті мәндері бар болған-дықтан және жоғарыдағы талдаулардан мына теорема орынды.

Дини теоремасы. Квадратымен интегралданатын симметриялық ядроның меншікті мәндері мен меншікті функциялары ақырлы санды болуы үшін оның ерекшеленген ядро болуы қажетті де жеткілікті.

Салдар. Кез келген квадратымен интегралданатын $\varphi(x)$ функциясы үшін

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|K^{(n)} \varphi\| = 0$$

теңдігі орынды.

Дәлелдеуі. Егер $K(x, s)$ ерекшеленбеген ядро болса, соңғы теңдіктің орындалуы ап-айқын. Бірінші салдар бойынша $K(x, s)$ ядросы ерекшеленбеген болса, онда $K^{(n)}(x, s)$ ядросының модулі бойынша ең кіші меншікті мәні λ_{n+1} болады.

Жоғарыдағы (73) теңсіздігі бойынша $K^{(n)}(x, s)$ ядросы, оның меншікті мәні мен меншікті функциясы үшін

$$\|K^{(n)}\| \leq \frac{1}{\lambda_{n+1}} \|\varphi\|.$$

Теңсіздік орынды және $n \rightarrow \infty$ жағдайда $\lambda_{n+1} \rightarrow \infty$ болғандықтан соңғы өрнектен $\|K^{(n)}\varphi\| \rightarrow 0$.

Тұрақты болған x үшін $K(x, s) \in L_2[a, b]$ олай болса, ол ядро ортонормаланған $\{\varphi_n(x)\}$ жүйе бойынша

$$K(x, s) \sim \sum_{n=1}^{\infty} C_n(x) \varphi_n(s).$$

Фурье қатарына жіктеледі де, ал Фурье коэффициенттері

$$C_n(x) = \int_a^b K(x, s) \varphi_n(s) ds = \frac{1}{\lambda_n} \varphi_n(x)$$

теңдігімен анықталады. Сонымен, $K(x, s)$ ядросына оның меншікті функциялар жүйесі $\{\varphi_n(x)\}$ бойынша

$$K(x, s) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \varphi_n(x) \varphi_n(s)$$

түріндегі бисызықты деп аталатын Фурье қатары сәйкес келеді екен. Бессель теңсіздігі бойынша

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \varphi_n^2 \leq \int_a^b K^2(x, s) ds. \quad (78)$$

Бұл теңсіздіктегі қатар мүшелері оң және оларды мүшелеп x бойынша a - дан b -ға дейін интегралдап $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \leq B^2$ теңсіздігін аламыз, яғни $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2}$ қатары жинақты.

Енді қайталанған ядроларды жіктейік. Егер $\{\lambda_k\}$ сандары мен $\{\varphi_k(x)\}$ функциялары $K(x, s)$ симметриялық ядросының меншікті мәндері мен меншікті функциялары болса, онда $K_m(x, s)$ қайталанатын ядросының меншікті мәндері $\{\lambda_k^{(m)}\}$, ал меншікті функциялары $\{\varphi_k(x)\}$ екені белгілі, яғни

$$\varphi_k(x) = \lambda_k^{(m)} \int_a^b K_m(x, s) \varphi_k(s) ds \quad (79)$$

теңдігі орындалады. $K_m(x, s)$ ядросын x аргументін тұрақтылап, ортонормаланған $\{\varphi_k(s)\}$ жүйесі бойынша Фурье қатарына жіктесек,

$$K_m(x, s) \sim \sum_{k=1}^{\infty} C_k(x) \varphi_k(s),$$

мұндағы, Фурье коэффициенттері

$$C_k(x) = \int_a^b K_m(x,s) \varphi_k(s) ds,$$

өрнегімен анықталады. Бұдан және (79) теңдігінен

$$C_k(x) = \frac{1}{\lambda_k^{(m)}} \varphi_k(x).$$

Сонымен,

$$K_m(x,s) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^{(m)}} \varphi_k(x) \varphi_k(s). \quad (80)$$

Егер $K(x,s) \in L_2[D]$ болса, онда $K_m(x,s) \in L_2[D]$ екенін көрсету қиын емес. Сондықтан (80) қатары Рисс-Фишер, теоремасы бойынша орташа мағынада жинақты. Егер $\int_a^b K^2(x,s) ds \leq A$ болса, онда (80) қатар тек орташа мағынада ғана жинақты емес, оның $m > 2$ болғанда абсолютті және бірқалыпты жинақты болатынын дәлелдеуге болады. $m \geq 3$ болсын. $n \rightarrow \infty \Rightarrow \lambda_n \rightarrow \infty$ болғандықтан, n санының жеткілікті мөлшерде үлкен мәндерінде $\lambda_n > 1$. Осыларды ескертіп, (80) өрнегіне Коши-Буняковский теңсіздігін пайдалансақ,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{\lambda_k^{(m)}} \varphi_k(x) \varphi_k(s) \right| &\leq \frac{1}{\lambda_k^{(m-2)}} \sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{\lambda_k^2} |\varphi_k(x)| \cdot |\varphi_k(s)| \leq \\ &\leq \frac{1}{\lambda_k^{(m-2)}} \left(\sum_{k=n}^{n+p} \frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=n}^{n+p} \frac{\varphi_k^2(s)}{\lambda_k^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Жоғарыдағы (78) Бессель теңсіздігі мен соңғы теңсіздіктен

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{\lambda_k^{(m)}} \cdot \varphi_k(x) \varphi_k(s) \right| < \varepsilon \quad (n > N, \forall p)$$

екені шығады. Олай болса, қатардың жинақтылығын көрсетуші Коши белгісі бойынша, (80) қатары бірқалыпты жинақты және оның қосындысы $K_n(x,s)$ болады. Сонымен мына теорема орынды.

Теорема. Егер $K(x,s)$ ядросы $\int_a^b K^2(x,s) ds \leq A$ шартын қанағаттандырса, онда $m \geq 3$ мәндерінде (80) қатары $D \equiv \{a \leq x, s \leq b\}$ облысында абсолютті және бірқалыпты жинақты болады да:

$$K_m(x,s) = \sum_{k=1}^m \frac{1}{\lambda_k^{(m)}} \cdot \varphi_k(x) \varphi_k(s).$$

Мысал. Фредгольмнің 2-текті интегралдық

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{\pi} \cos(x-t) \varphi(t) dt + \sin x$$

теңдеуінің шешімін табайық.

Шешуі. $\cos(x-t) = \cos x \cos t + \sin x \sin t$ формуласын пайдалансақ, теңдеуді

$$\varphi(x) = \lambda \cos x \int_0^{\pi} \cos t \varphi(t) dt + \lambda \sin x \int_0^{\pi} \sin t \varphi(t) dt + \sin x$$

түріне келтіреміз. Бұл өрнекте

$$C_1 = \int_0^{\pi} \cos t \varphi(t) dt, C_2 = \int_0^{\pi} \sin t \varphi(t) dt$$

деп белгілесек, онда $\varphi(x) = \lambda C_1 \cos x + \lambda C_2 \sin x + \sin x$ теңдеуі шығады. Бұл теңдеуде C_1 мен C_2 белгісіз тұрақты коэффициенттер. Оларды табу үшін теңдіктің екі жағын $\cos x$ пен $\sin x$ функцияларына көбейтіп, одан кейін x бойынша 0-ден π -ге дейін интегралдап,

$$C_1 = \int_0^{\pi} \cos x \varphi(x) dx = \lambda C_1 \int_0^{\pi} \cos^2 x dx + \lambda C_2 \int_0^{\pi} \sin x \cos x dx + \int_0^{\pi} \sin x \cos x dx,$$

$$C_2 = \int_0^{\pi} \sin x \varphi(x) dx = \lambda C_1 \int_0^{\pi} \cos x \sin x dx + \lambda C_2 \int_0^{\pi} \sin^2 x dx + \int_0^{\pi} \sin^2 x dx$$

немесе $C_1(1 - \frac{\pi}{2} \lambda) = 0$, $C_2(1 - \frac{\pi}{2} \lambda) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow C_1 = 0$, $C_2 = \frac{\pi}{2 - \lambda \pi}$ екенін табамыз. Демек, берілген теңдеудің шешімі

$$\varphi(x) = \sin x + \frac{\lambda \pi \sin x}{2 - \lambda \pi} \left(\lambda \neq \frac{2}{\pi} \right)$$

болады.

§ 5.4. Гильберт-Шмидт теоремасы

Егер $K(x,s)$ симметриялық ядросы үшін $\int_a^b K(x,s) \omega(s) ds = 0$ теңдігін қанағаттандыратындай $\omega(x) \neq 0$ функциясы табылмаса, онда $K(x,s)$ ядросы тұйық деп, ал ондай $\omega(x)$ функциясы табылса, онда $K(x,s)$ ядросы тұйық емес деп аталады.

1-теорема (Шмидт). Меншікті функциялар жүйесі тұйық болуы үшін ядроның тұйық болуы қажетті де, жеткілікті.

Дәлелдеуі. $K(x,s)$ ядросы тұйық емес ядро болсын, яғни $\omega(x) \neq 0$ функциясы табылып,

$$\int_a^b K(x,s)\omega(s)ds = 0$$

шарты орындалсын. Сонғы өрнекті $\varphi_k(x)$ функциясына көбейтіп, сонан соң x бойынша a -дан b -ға дейін интегралдасақ,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b \left(\int_a^b K(x,s)\omega(s)ds \right) \varphi_k(x)dx = \int_a^b \omega(s) \left\{ \int_a^b K(x,s)\varphi_k(x)dx \right\} ds = \\ &= \int_a^b \omega(s) \frac{\varphi_k(s)}{\lambda_k} ds = \frac{1}{\lambda_k} \int_a^b \varphi_k(s)\omega(s)ds, \end{aligned}$$

яғни $\{\varphi_k\}$ жүйесі тұйық болмайды.

Керісінше $\{\varphi_k(x)\}$ меншікті функциялар жүйесі тұйық болмасын, яғни $\omega(x) \neq 0$ табылып, олар үшін

$$\int_a^b \varphi_k(x)\omega(x)dx = 0 \quad (81)$$

теңдігі орындалсын. Жоғарыда дәлелденген тұжырымнан

$$K_4(x,s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^4} \varphi_k(x)\varphi_k(s).$$

Енді осы теңдікті $\omega(x)\omega(s)$ -ке көбейтіп, одан кейін s пен x бойынша a -дан b -ға дейін интегралдап, (81) теңдігін ескерсек,

$$\int_a^b \int_a^b K_4(x,s)\omega(x)\omega(s)dsdx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^4} \int_a^b \varphi_k(x)\omega(x)dx \int_a^b \varphi_k(s)\omega(s)ds = 0.$$

Ал $K_4(x,s) = \int_a^b K_2(x,t)K_2(t,s)dt$ болғандықтан, соңғы теңдеуден

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b \int_a^b K_4(x,s)\omega(s)\omega(x)dsdx = \int_a^b \left\{ \int_a^b K_2(x,t)\omega(x)dx \right\} \times \\ &\times \left\{ \int_a^b K_2(t,s)\omega(s)ds \right\} dt = \int_a^b \left\{ \int_a^b K_2(x,t)\omega(x)dx \right\} dt. \end{aligned}$$

Сондықтан $\int_a^b K_2(x,t)\omega(x)dx=0$ және дәл осылай $\int_a^b K(x,t)\omega(x)dx=0$, яғни теорема дәлелденді.

Егер $f(x)=\int_a^b K(x,s)h(s)ds=Kh$ ($h(x)\in L_2[a,b]$) теңдігі орындалса, онда $f(x)$ функциясы $K(x,s)$ ядросы арқылы өрнектелген дейді.

2-теорема (Гильберт- Шмидт). $K(x,s)\in L_2(a,b)$ ядросы арқылы өрнектелетін кез келген $f(x)$ функциясы сол ядроның меншікті функциялары бойынша орташа жинақты Фурье қатарына жіктеледі.

Дәлелдеуі. Алдымен $K(x,s)$ ядросының меншікті функциялары $\{\varphi_k(x)\}$ арқылы $h(x)$ функциясын Фурье қатарына жіктейік:

$$h(x)\sim \sum_{n=1}^{\infty} h_n \varphi_n(x) \quad (h_n=(h,\varphi_n)).$$

Бессель теңсіздігін пайдалансақ, $\sum_{n=1}^{\infty} h_n^2 \leq \int_a^b h^2(x)dx$ қатарының жинақты екенін көреміз. Одан кейін $f(x)$ үшін Фурье қатарын

$$f(x)\sim \sum_{n=1}^{\infty} f_n \varphi_n(x) \quad (82)$$

$$\text{түземіз, мұндағы, } f_n=(f,\varphi_n)=(Kh,\varphi_n)=(h,K\varphi_n)=\frac{1}{\lambda_n}(h,\varphi_n)=\frac{h_n}{\lambda_n}.$$

Олай болса,

$$f(x)\sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} h_n \varphi_n(x). \quad (83)$$

$h(x)\in L_2[a,b]$ болғандықтан $f(x)\in L_2[a,b]$ болады. Сондықтан Рисс-Фишер теоремасы бойынша (83) қатары орташа жинақты.

Енді (83) қатарының қосындысы $f(x)$ -ке тең болатынын дәлелдейік. Ол үшін

$$S_m(x)=\sum_{n=1}^m \frac{1}{\lambda_n} h_n \varphi_n(x)$$

деп алайық. Онда

$$\begin{aligned} f(x) &= S_m(x) = \int_a^b K(x,s)h(s)ds - \sum_{n=1}^m \frac{\varphi_n(x)}{\lambda_n} \int_a^b h(s)\overline{\varphi_n}(s)ds = \\ &= \int_a^b \left[K(x,s) - \sum_{n=1}^m \frac{1}{\lambda_n} \varphi_n(x)\overline{\varphi_n}(s) \right] h(s)ds = \int_a^b K^{(n)}(x,s)h(s)ds = K^{(n)}h. \end{aligned}$$

Жоғарыдағы §5.3-тегі лемманың салдарын пайдалансақ, $m \rightarrow \infty$ ұмтылған жағдайында $\|f - S_m\| = \|K^{(n)}h\| \rightarrow 0$ болады. Демек,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} h_n \varphi_n(x),$$

яғни теорема дәлелденді.

Ескерту. Гильберт-Шмидт теоремасында $\{\varphi_k(x)\}$ меншікті функциялар жүйесі толық деп ұйғарылмайды.

3-теорема. Егер симметриялық ядро $\int_a^b |K(x,s)|^2 ds < A$ шартын қанағаттандырса, онда (83) қатары бірқалыпты жинақты болады.

Дәлелдеуі. Жоғарыдағы (78) теңсіздігін пайдаланып, (83) қатарының қалдық бөлігін бағаласақ,

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} h_k \frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} \right| \leq \sum_{k=n}^{n+p} h_k^2 \sum_{k=n}^{n+p} \frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k^2} \leq A \sum_{k=n}^{n+p} h_k^2.$$

Егер $\sum_{k=n}^{n+p} h_k^2$ қатарының жинақтылығын пайдалансақ, соңғы теңсіздіктен барлық $n > N$ және $\forall p > 0$ үшін

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} h_k \frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} \right| < \varepsilon$$

екенін көреміз, бұдан Коши белгісін ескеріп, (82) қатарының бірқалыпты жинақты екенін дәлелдейміз.

Гильберт-Шмидт теоремасының салдары.

1-салдар. Қайталанатын $K_2(x,s)$ ядросы меншікті функциялар $\{\varphi_k(x)\}$ жүйесі бойынша

$$K_2(x,s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} \varphi_k(x) \varphi_k(s) \quad (84)$$

түріндегі қатарға жіктеледі.

Расында, қайталанушы ядро анықтамасы бойынша

$$K_2(x,s) = \int_a^b K(x,t) K(t,s) dt.$$

Егер $K(x,s) \in L_2(D)$ болса, онда 2-теорема бойынша

$$K_2(x,s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} h_k \varphi_k(x), \quad h_k = \frac{1}{\lambda_k} \varphi_k.$$

$K_2(x, s)$ үшін алынған жіктелудің оң жағындағы h_k -ны оның мәнімен ауыстырсақ, (84) теңдігі шығады.

2-салдар. Ядроның резольвентасы сол ядроның меншікті функциялары бойынша қатарға жіктеледі:

$$R(x, s; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^n - 1} \cdot \varphi_k(x) \cdot \varphi_k(s).$$

Расында λ -ның кіші мәндері үшін

$$R(x, s; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K_n(x, s)$$

екенін дәлелдегенбіз, ал қайталанатын ядроның жіктелу қасиеті бойынша формулаларды пайдалансақ,

$$\begin{aligned} R(x, s; \lambda) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \varphi_k(x) \varphi_k(s) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} \varphi_k(x) \varphi_k(s) + \dots + \lambda^{n-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^n} \varphi_k(x) \varphi_k(s) + \dots = \\ &= \frac{\varphi_1(x) \varphi_1(s)}{\lambda_1} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\lambda_1} \right)^{n-1} + \frac{\varphi_2(x) \varphi_2(s)}{\lambda_2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\lambda_2} \right)^{n-1} + \dots + \frac{\varphi_k(x) \varphi_k(s)}{\lambda_k} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\lambda_k} \right)^{n-1} + \dots = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x) \varphi_k(s)}{\lambda_k - \lambda}. \end{aligned}$$

Біртекті емес симметриялық ядролы

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds + f(x)$$

теңдеуінің шешімін анықтайық. $g(x) = \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds$ деп белгілейік. Егер $\varphi(x) \in L_2(a, b)$ болса, онда $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \varphi_k(x)$, мұндағы, C_k – тұрақты шамалар. Сондықтан

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda \sum_{k=1}^{\infty} C_k \varphi_k(x) \quad (86)$$

(85) теңдеуіндегі $\varphi(x)$ функциясы (86) теңдеуінің оң жағымен ауыстырсақ,

$$f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} C_k \varphi_k(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s) \left[f(s) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} C_k \varphi_k(s) \right] ds,$$

бұдан

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} C_k \varphi_k(x) &= \int_a^b K(x, s) f(s) ds + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} C_k \int_a^b K(x, s) \varphi_k(s) ds = \\ &= \int_a^b K(x, s) f(s) ds + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k} \end{aligned}$$

немесе

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_k}\right) \varphi_k(x) = \int_a^b K(x,s) f(s) ds = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\lambda_k} \varphi_k(x). \quad (87)$$

Бұл өрнектің екі жағындағы $\varphi_k(x)$ функцияларының коэффициенттерін салыстырып,

$$C_k = \frac{f_k}{\lambda_k - \lambda} \quad (\lambda_k \neq \lambda, k=1,2,\dots)$$

екенін аламыз. C_k ($k=1,2,\dots$) коэффициенттері мәндерін (86) теңдігіне қойып,

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{\lambda_k - \lambda} \varphi_k(x)$$

Шмидт формуласын аламыз.

Егер $\lambda = \lambda_m$ рангісі r еселі меншікті мән болса, онда $C_m, C_{m+1}, \dots, C_{m+r-1}$ коэффициенттерін (87) теңдігі бойынша анықтай алмаймыз, оның үстіне сол (87) теңдігінен

$$f_k = \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx = 0 \quad (k = m, m+1, \dots, m+r-1)$$

екені шығады. Сондықтан бұл жағдайда (85) теңдігінің шешімі

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{k=1}^{m-1} \frac{f_k}{\lambda_k - \lambda} \varphi_k(x) + \lambda \sum_{k=m}^{m+r-1} C_k \varphi_k(x) + \lambda \sum_{k=m+r}^{\infty} \frac{f_k}{\lambda_k - \lambda} \varphi_k(x)$$

түрінде жазылады.

Енді ядроларды кластарға бөлейік. Гильберт-Шмидт теоремасын қолдансақ,

$$\int_a^b K(x,s) h(s) ds = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} h_k \varphi_k(x)$$

теңдігін аламыз. Бұл теңдіктің екі жағын да $q(x)$ функциясына көбейтіп, одан кейін x бойынша a -дан b -ға дейін интегралдасақ,

$$\int_a^b \int_a^b K(x,s) h(s) q(x) ds dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} h_k q_k.$$

Егер $q(x) = h(x)$ болса, онда

$$J(h) = \int_a^b \int_a^b K(x,s) h(s) h(x) ds dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} h_k^2.$$

Міне, осы теңдік ядроны кластарға бөлудің негізі болады. Бұл теңдік бойынша барлық меншікті мәндердің оң болуының қажетті де жеткілікті шарты – кез

келген $h(x) \in L_2(a, b)$ үшін $J(h) > 0$ болуы. Расында, егер барлық $\lambda_k > 0$ болса, онда теңсіздіктен $J(h) > 0$ болатыны көрініп тұр. Енді сол меншікті мәндердің кемінде біреуін $\lambda_m < 0$ деп алайық және $h(x) = \varphi_m(x)$ болсын. Меншікті функциялардың ортонормаланғаны себепті $J(\varphi_m) = \frac{1}{\lambda_m}$ болады.

Егер симметриялық $K(x, s)$ ядросының барлық меншікті мәндері оң болса, онда ядро оң деп аталады. Бұл жағдайда $J(h) \geq 0$. Егер симметриялық $K(x, s)$ ядросының барлық меншікті мәндері теріс болса, онда ядро теріс делінеді. Бұл жағдайда $J(h) \leq 0$. Егер $\forall h(x) \in L_2[a, b]$ үшін $J > 0$ болса, онда оң симметриялық ядро анық (катаң) оң делінеді. Егер $\forall h(x) \in L_2[a, b]$ үшін $J < 0$ болса, онда теріс симметриялық ядро анық (катаң) теріс делінеді.

4-теорема. $K(x, s)$ ядросының анық оң болуы үшін, барлық меншікті мәндер оң және ядро түйық болуы қажетті де жеткілікті.

Дәлелдеуі. $K(x, s)$ ядросы түйық болмасын, онда $h(x) \neq 0$ үшін $\int_a^b K(x, s)h(s)ds = 0$ болады. Бұдан:

$$J(h) = \int_a^b \left[\int_a^b K(x, s)h(s)ds \right] h(x)dx = 0,$$

яғни $K(x, s)$ анық оң емес. Сонымен, егер $K(x, s)$ ядросы анық оң болса, онда ол түйық.

Мерсер теоремасы. Егер симметриялық $K(x, s)$ ядросы негізгі $D = \{a \leq x, s \leq b\}$ облысында оң және үзіліссіз болса, онда бұл ядроның бисызықты қатары бірқалыпты жинақты.

Дәлелдеуі. Оң ядро үшін $K(x, s)$ екенін дәлелдейік. Қарсы жорып, (x_0, x_0) нүктесінде $K(x_0, x_0) < 0$ деп ұйғарайық. Бұл жағдайда үзіліссіздік қасиеті бойынша $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ нүктесі үшін $K(x, s) < 0$ болады. Мынадай функция құрайық:

$$h(x) = \begin{cases} h_1(x) > 0, & x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon), \\ 0, & x \notin (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon); \end{cases}$$

бұл функция үшін

$$J(h) = \int_a^b \int_a^b K(x, s)h(s)h(x)dsdx = \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} K(x, s)h_1(x)h_1(s)dsdx < 0,$$

яғни оң болу шартына қарама-қайшы. Бұл қайшылық $K(x, s) > 0$ екенін дәлелдейді.

Енді

$$Q(x, s) = K(x, s) - \sum_{k=1}^p \frac{1}{\lambda_k} \varphi_k(x) \varphi_k(s) \quad (88)$$

деп белгілейік. Әрине $Q(x,s)$ – үзіліссіз және симметриялық ядро. Енді осы $Q(x,s)$ ядросының оң екенін көрсетейік. Ол үшін $m > p$ болғанда $h = \varphi_m$ деп алайық. Онда $\{\varphi_m\}$ жүйенің ортонормаланғанын пайдаланып,

$$J(h) = \int_a^b \int_a^b Q(s,x) \varphi_m(x) \varphi_m(s) ds dx = \int_a^b \int_a^b K(x,s) \varphi(s) \varphi_m(x) dx ds \geq 0,$$

яғни $Q(x,s)$ ядросының оң екенін дәлелдедік. Сондықтан $Q(x,x) > 0$ Олай болса, (88) теңдігі бойынша

$$Q(x,x) = K(x,x) - \sum_{k=1}^1 \frac{1}{\lambda_k} \varphi_k^2(x) > 0$$

немесе барлық p үшін

$$\sum_{k=1}^p \frac{1}{\lambda_k} \varphi_k^2(x) < K(x,x).$$

Сондықтан оң мүшелерден құралған $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \varphi_k^2(x)$ қатар жинақты. Ал бисызықты қатар үшін

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \varphi_k(x) \varphi_k(s) \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} [\varphi_k^2(x) + \varphi_k^2(s)]$$

теңсіздігі орынды, ал бұл теңсіздіктен қатардың бірқалыпты жинақтылығы шығады. Сонымен

$$K(x,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \varphi_n(x) \varphi_n(s)$$

теңдігі орынды. Бұдан $s = x$ деп алып, ортонормаланған $\{\varphi_n(x)\}$ үшін $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \int_a^b K(x,x) dx = A_1$ теңдігін аламыз.

§ 5.5. Симметриялық интегралдық теңдеуге келтірілетін интегралдық теңдеулер

1. Қисық симметриялық ядро. Фредгольмнің интегралдық

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,s) \varphi(s) ds + f(x)$$

теңдеуін қарастырайық. Комплекс $K(x,s)$ ядросы үшін $K(x,s) = -\overline{K(s,x)}$ теңдігі орындалса, оны қисық симметриялық ядро деп айтады. Нақты $K(x,s)$ ядросы үшін $K(x,s) = -K(s,x)$ теңдігі орындалса, оны қисық симметриялық ядро деп айтады. Мысалы, $K(x,s) = x - s$, $K(x,s) = \sin(x - s)$ қисық симметриялық ядролар.

Егер $L(x,s)=iK(x,s)$ түріндегі ядроны алсақ, $L(x,s)=\overline{L(s,x)}$ демек, $L(x,s)$ симметриялық ядро. Егер жоғарыдағы берілген теңдеу қисық симметриялық ядролы теңдеу болса, оны

$$\varphi(x)=\mu\int_a^b L(x,s)\varphi(s)ds+f(x)$$

симметриялық ядролы түріндегі интегралдық теңдеуге келтіруге болады (мұндағы, $\mu=i\lambda$ немесе $\lambda=-i\mu$). Демек, берілген қисық симметриялық ядролы теңдеудің кемінде бір меншікті мәні бар болады және оның барлық меншікті мәндері жорамал сандар.

2. Симметриялық ядролы интегралдық теңдеуге келтіретін теңдеулер.
Қолданбалы есептерде

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b \rho(s)K(x,s)\varphi(s)ds+f(x)$$

түріндегі интегралдық теңдеу жиі кездеседі, мұндағы, $K(x,s)$ нақты симметриялық ядро және $\rho(x)\geq 0$ $[a,b]$ кесіндіде белгілі функция. Бұл теңдеудің екі жағында $\rho(x)$ -ке көбейтіп, одан кейін

$$\psi(x)=\sqrt{\rho(x)}\varphi(x) \tag{89}$$

өрнегімен жаңа функция енгізіп, белгісіз $\psi(x)$ үшін

$$\psi(x)=\lambda\int_a^b M(x,s)\psi(s)ds+\sqrt{\rho(x)}f(x)$$

теңдеуін аламыз, мұндағы, $M(x,s)=\sqrt{\rho(x)\rho(s)}K(x,s)$ симметриялық ядро.

Егер $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n,\dots$ сандары мен $\psi_1(x),\psi_2(x),\dots$ функциялары $M(x,s)$ ядросының сәйкес меншікті мәндері мен меншікті функциялары болса, онда $k\neq m$ болған жағдайда $\int_a^b \psi_k(x)\psi_m(x)dx=0$ екенін білеміз. (89) теңдігін ескерсек, біртекті

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b \rho(s)K(x,s)\varphi(s)ds$$

интегралдық (теңдеуінің меншікті функциялары $\varphi_k(x)$ ($k=1,2,\dots$) бар және олар $\rho(x)$ салмақ функциясымен ортонормаланған, яғни барлық $k\neq m$ үшін

$$\int_a^b \rho(x)\varphi_m(x)\varphi_k(x)dx=0$$

теңдігі орынды болады.

Екінші қайталанатын ядро үшін

$$M_2(x, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} \psi_k(x) \psi_k(s)$$

меншікті функциялардың жіктеліп алынған жүйелері бойынша қатарға жіктеу орынды. Бұдан:

$$\begin{aligned} M_2(x, s) &= \int_a^b M(x, t) M(t, s) dt = \int_a^b K(x, t) K(t, s) \rho(t) \sqrt{\rho(x) \rho(s)} dt = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} \cdot \psi_k(x) \psi_k(s) = \sqrt{\rho(x)} \cdot \sqrt{\rho(s)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} \cdot \varphi_k(x) \varphi_k(s), \end{aligned}$$

бұл теңдіктің екі жағын $\sqrt{\rho(x) \rho(s)}$ шамасына қыскартсақ,

$$H_2(x, s) = \int_a^b K(x, t) K(t, s) \rho(t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} \cdot \varphi_k(x) \varphi_k(s).$$

Дәл осы жолмен

$$H_p(x, s) = \int_a^b H_{p-1}(x, t) K(t, s) \rho(t) dt,$$

ядросы үшін

$$H_p(x, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^p} \varphi_k(x) \varphi_k(s)$$

теңдігі алынады. Егер

$$M(x, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \psi_k(x) \psi_k(s)$$

жіктелуі орынды болса, онда

$$K(x, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \varphi_k(x) \varphi_k(s)$$

және т.с.с.

3. Шмидт ядросы және ол ядроның меншікті функциялары.

$H(x, s) \in L_2(D)$ симметриялық ядро емес, ал $H^*(x, s) = H(s, x)$ оның түйіндесі, бұларға сәйкес Фредгольм операторлары H және H^* болсын. Ал $K_1 = H^* H$ және $K_2 = H H^*$ симметриялық және оң операторлар дейік. Олардың ядролары

$$K_1(x, s) = \int_a^b H^*(x, t) H(t, s) dt, \quad K_2(x, s) = \int_a^b H(x, t) H^*(t, s) dt$$

симметриялық және оң ядролар болады. Расында,

$$\begin{aligned}
K_1(s, x) &= \int_a^b H^*(s, t) H(t, x) dt = \int_a^b H(t, x) H^*(s, t) dt = \int_a^b H^*(x, t) H(t, s) dt = K_1(x, s), \\
\int_a^b \int_a^b K_1(x, t) h(x) h(s) ds dx &= \int_a^b \int_a^b \left\{ \int_a^b H^*(x, t) H(t, s) dt \right\} h(x) h(s) ds dx = \\
&= \int_a^b dt \left\{ \int_a^b H^*(x, t) h(x) dx \int_a^b H(t, s) h(s) ds \right\} = \int_a^b dt \left(\int_a^b H(t, s) h(s) ds \right)^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Міне, осындай қасиеттері бар $K_1(x, s)$ және $K_2(x, s)$ ядролары $H(x, s)$ ядросы үшін Шмидт ядролары деп аталады.

Әрбір симметриялық емес $H(x, s)$ ядросына Шмидт екі ортогональ функцияны сәйкестендіреді, ал жалпы жағдайда берілген ядроның меншікті функциялары ешқандай байланысы жоқ жүйемен сәйкестендіреді. Екі $\varphi(x)$ және $\psi(x)$ функциялары (Шмидтің анықтауы бойынша)

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b H(x, s) \psi(s) ds, \quad \psi(s) = \lambda \int_a^b H(s, x) \varphi(x) dx \quad (90)$$

теңдеулерін қанағаттандырса, онда $\varphi(x)$ пен $\psi(s)$ функциялары одактас меншікті функциялар деп аталады. (90) теңдеулеріндегі λ шамасы $H(x, s)$ ядросының меншікті мәні. Әрқашан меншікті функциялар пары бар болады. Расында, (90) теңдеулерінен $\psi(x)$ функциясын шығарып тастасақ, онда симметриялық ядролы

$$\varphi(x) = \lambda^2 \int_a^b K_2(x, s) \varphi(s) ds$$

біртекті интегралдық теңдеуіне келеміз, мұндағы, $K_2(x, s)$ – Шмидт ядросы. Егер (90) теңдеулерінен $\varphi(x)$ функциясын шығарып тастасақ, онда симметриялық ядролы

$$\psi(x) = \lambda^2 \int_a^b K_1(x, s) \psi(s) ds \quad (91)$$

біртекті интегралдық теңдеуін аламыз, мұнда да $K_1(x, s)$ – Шмидт ядросы.

Егер (90) жүйесінің λ_i параметрлеріне сәйкес $\varphi_i(x)$, $\psi_i(x)$ шешімдері болса, онда $K_1(x, s)$, $K_2(x, s)$ ядролары үшін λ_i^2 сандары меншікті мәндер, ал $\psi_i(x)$ пен $\varphi_i(x)$ функциялары оларға сәйкес меншікті функциялар болады. Керісінше, λ_0 – сол ядролардың біреуінің (мәселен, $K_1(x, s)$ ядросының) меншікті мәні болсын. Бұл сан әрқашан оң. Ал $\varphi_0(x)$ функциясы сол λ_0 санына сәйкес меншікті функция болсын. Егер

$$\psi_0(x) = \sqrt{\lambda_0} \int_a^b H(t, x) \varphi_0(t) dt$$

деп алсақ, онда

$$\varphi_0(x) = \sqrt{\lambda_0} \int_a^b H(x, t) \psi_0(t) dt.$$

Сонымен, (90) теңдеулер жүйесінің шешімдерін табу мәселесі $K_1(x, s)$ немесе $K_2(x, s)$ симметриялық ядроларының біреуінің меншікті мәндері мен меншікті функцияларын табу мәселесімен пара-пар. Бұл екі ядроның меншікті мәндері бірдей және оң болғандықтан ($\lambda_i \geq 0$) оларды $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \dots$ деп белгілейік. $K_1(x, s)$ ядросының ортонормаланған меншікті функциялары $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ болсын. (90) теңдеуінің екіншісінде $\lambda = \lambda_i$ және $\varphi = \varphi_i(x)$ деп алсақ, (91) теңдеуінің λ_i меншікті мәніне сәйкес меншікті функциясын аламыз. Осылай алынған $\psi_i(x)$ функциялары да ортонормаланған жүйе құрайды.

Расында,

$$\psi_i(x) = \lambda_i \int_a^b H(t, x) \varphi_i(t) dt, \quad \psi_k(x) = \lambda_k \int_a^b H(s, x) \varphi_k(s) ds$$

Теңдеулерінен

$$\begin{aligned} \int_a^b \psi_i(x) \psi_k(x) dx &= \lambda_i \lambda_k \int_a^b \left\{ \int_a^b H(t, x) \varphi_i(t) dt \int_a^b H(s, x) \varphi_k(s) ds \right\} dx = \\ &= \lambda_i \lambda_k \int_a^b \int_a^b K_1(t, s) \varphi_i(t) \varphi_k(s) dt ds = \frac{\lambda_i}{\lambda_k} \int_a^b \varphi_i(t) \varphi_k(t) dt = \begin{cases} 1, & i = k; \\ 0, & i \neq k, \end{cases} \end{aligned}$$

демек, $\{\psi_i(x)\} (i = 1, 2, \dots)$ жүйесі ортонормаланған.

4. Шмидт теоремасы. $\forall h(x) \in L_2(a, b)$ үшін

$$f(x) = \int_a^b H(x, s) h(s) ds \tag{92}$$

теңдігі орынды екенін Шмидт дәлелдеген (мұндағы, $H(x, s)$ симметриялық емес ядро).

Теорема (Шмидт). $H(x, s)$ -үзіліссіз ядро болсын. (92) теңдігімен анықталған кез келген $f(x)$ функциясы $H(x, s)$ ядросының меншікті функциялары $\{\varphi_i(x)\}$ арқылы бірқалыпты жинақты қатарға жіктеледі.

Дәлелдеуі. Теореманың шартына байланысты (92) теңдігімен анықталған $f(x)$ функциясы үзіліссіз болады. Ал $f(x)$ үшін Фурье коэффициенттері

$$f_i = \int_a^b \int_a^b H(x, s) h(s) \varphi_i(s) ds dx = \frac{1}{\lambda_i} \int_a^b h(s) \psi_i(s) ds = \frac{h_i}{\lambda_i}.$$

Екінші жағынан,

$$\frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i} = \int_a^b H(x, s) \psi_i(s) ds$$

$H(x, s)$ ядросының Фурье коэффициенттері. Бессель теңсіздігінен $\sum_{i=1}^{\infty} h_i^2$ және $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i}$ қатарларының жинақтығы шығады. Сондықтан

$$S(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h_i}{\lambda_i} \varphi_i(x)$$

қатары абсолютті және бірқалыпты жинақты. $R(x) = f(x) - S(x)$ деп белгілейік. $R(x)$ функциясы барлық $\varphi_i(x)$ функцияларына ортогональ. Расында,

$$\int_a^b R(x) \varphi_i(x) dx = \int_a^b f(x) \varphi_i(x) dx - \int_a^b S(x) \varphi_i(x) dx = \frac{1}{\lambda_i} (h_i - h_i) = 0,$$

демек,

$$\int_a^b R(x) S(x) dx = \int_a^b R(x) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h_i}{\lambda_i} \varphi_i(x) dx = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h_i}{\lambda_i} \int_a^b R(x) \varphi_i(x) dx = 0. \quad (93)$$

Мына өрнекті қарастырайық:

$$\int_a^b H(x, t) f(x) dx = \int_a^b H(x, t) R(x) dx + \int_a^b H(x, t) S(x) dx.$$

Бұған (92) теңдігін пайдалансақ,

$$\int_a^b K_1(x, s) h(s) ds = \int_a^b H(x, t) R(x) dx + \int_a^b H(x, t) S(x) dx.$$

Гильберт-Шмидт теоремасы бойынша $\int_a^b K_1(x, s) h(s) ds$ функциясы $K_1(x, s)$ ядросының меншікті $\psi_i(x)$ функциялары арқылы коэффициенттері $\frac{h_i}{\lambda_i^2}$ болған бірқалыпты жинақты қатарға жіктеуге болады. Екінші жағынан

$$\int_a^b H(x,t)S(x)dx = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i^2} h_i \psi_i(t).$$

Сондықтан алдыңғы теңдіктен $\int_a^b H(x,t)R(x)dx = 0$.

Демек (93) және соңғы теңдіктерден

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)R(x)dx &= \int_a^b \int_a^b H(x,s)h(s)R(x)dsdx = 0, \\ \int_a^b R^2(x)dx &= \int_a^b R(x)[f(x) - S(x)]dx = 0, \end{aligned}$$

яғни $R(x) = 0$. Ендеше

$$f(x) = S(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h_i}{\lambda_i} \varphi_i(x) \quad (94)$$

теңдігін аламыз. Бұл формуладан $\forall g(x) \in L_2[a,b]$ үшін

$$\int_a^b \int_a^b H(x,s)h(s)g(x)dsdx = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h_i}{\lambda_i} \cdot g_i.$$

Осы тәсілмен кез келген $f(x) = \int_a^b H(x,s)g(x)ds$ функциясын $\psi_i(x)$ функциялары арқылы бірқалыпты жинақты $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} g_i \psi_i(x)$ қатарына жіктеуге болады.

Теорема дәлелденді.

Енді (94) формуласын симметриялық

$$K_2(x,s) = \int_a^b H(x,t)H^*(t,s)dt$$

ядросына қолданайық. Сонда ол ядро

$$K_2(x,s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2} \psi_i(x) \psi_i(s) \quad (95)$$

түрінде жіктеледі. Дәл осылай

$$K_1(x,s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2} \psi_i(x) \psi_i(s)$$

қатарын аламыз.

$H(x, s)$ ядросын жіктейік. $\{\varphi_i(x)\}$ жүйесі бойынша

$$H(x, s) = \sum_{i=1}^{\infty} H_i(s) \varphi_i(x)$$

түрінде жіктейміз, мұндағы,

$$H_i(s) = \int_a^b H(x, s) \varphi_i(x) dx = \frac{1}{\lambda_i} \varphi_i(s),$$

ал бұл мәнді алдыңғы қатарға қойып,

$$H_i(x, s) = \sum_a^b \frac{1}{\lambda_i} \varphi_i(x) \psi_i(s)$$

қатарын аламыз. Бұл қатар x пен s бойынша орташа жинақты. Расында, жоғарыдағы өрнектерден

$$\begin{aligned} \int_a^b \left[H(x, s) - \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \varphi_i(x) \psi_i(s) \right]^2 ds &= \int_a^b H^2(s, x) ds - \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i^2} \varphi_i^2(x) = \\ &= K_2(x, x) - \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i^2} \varphi_i^2(x) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2} \varphi_i^2(x), \end{aligned}$$

бұл (95) бірқалыпты жинақты қатарының қалдық мүшесі, сондықтан ол $n \rightarrow \infty$ жағдайда нөлге ұмтылады. Демек,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \left[H(x, s) - \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \varphi_i(x) \varphi_i(s) \right]^2 dx = 0.$$

6. БІРІНШІ ТЕКТІ ИНТЕГРАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР

§ 6.1. Вольтеранның бірінші текті теңдеуі

Вольтеранның 1-тексті интегралдық теңдеуін қарастырайық:

$$\int_a^x K(x,s)\varphi(s)ds = f(x), \quad (96)$$

мұндағы, $K(x,s)$ пен $f(x)$ функциялары белгілі, ал $\varphi(x)$ белгісіз функциялар. Екінші текті интегралдық теңдеуге қарағанда бұл теңдеудің шешімі бар болуы үшін кейбір жаңа шарттар қою керек. Ол үшін

$$\int_a^x \varphi(s)ds = f(x)$$

теңдеуін қарастырайық. Бұл теңдеудің шешімін $C[a,b]$ класынан іздейік. Бұл жағдайда теңдеу шешілуі үшін $f(a)=0$ болуы қажет және $f(x)$ функциясының $[a,b]$ кесіндіде үзіліссіз туындысы бар болуы керек, яғни теңдеудің оң жағы кез келген функция емес.

Енді (96) теңдеуін қарастырайық. Ол теңдеудің үзіліссіз $\varphi(x)$ шешім бар болуы үшін $f(a)=0$ болуы қажетті. Оның үстіне, егер $\frac{d}{dx}K(x,s) \in C[a,b]$ болса, онда $f'(x) \in C[a,b]$. (96) теңдеуінің екі жағында x бойынша дифференциалдап,

$$K(x,x)\varphi(x) + \int_a^x K'_x(x,s)\varphi(s)ds = f'(x) \quad (97)$$

теңдеуін аламыз. Мұндағы, $K(x,x) \neq 0$, $x \in [a,b]$ болсын. Бұл теңдеуді $K(x,x)$ функциясына бөліп,

$$\varphi(x) + \int_a^x \frac{K'_x(x,s)}{K(x,x)}\varphi(s)ds = \frac{f'(x)}{K(x,x)} \quad (98)$$

2-тексті Вольтерра теңдеуін аламыз. (98) теңдеуін жоғарыдағы айтылған әдістермен шешу арқылы біртекті (96) интегралдық теңдеуінің шешімін табамыз.

Егер $K(x, x)$ функциясы $[a, b]$ кесіндінің кейбір нүктелерінде нөлге айналса (мәселен, $x = c$ нүктесінде), онда (98) теңдеуі 2-текті теңдеудің қасиеттерінен бөлек, ерекше қасиетке ие болады. Мұндай теңдеуді Пикар анықтамасы бойынша 3-текті деп атайды. Ондай теңдеулерді біз қарастырмаймыз.

Кейбір жағдайда $K(x, x) = 0$ болса, (97) теңдеуі тағы да 1-текті теңдеу түрінде қалады:

$$\int_a^x K'(x, s) \varphi(s) ds = f'(x),$$

бұған тағы да (96) теңдеуін 2-текті теңдеуге келтіру әдісін қолданамыз, бірақ бұл жағдайда $K(x, s)$ пен $f(x)$ функциялары $C^2[a, b]$ класында болуы керек.

• **Ескерту.** Егер $K(x, x)$ функциясы $[a, b]$ кесіндісінің оңашаланған $c_1 < c_2 < \dots$ нүктелерінде нөлге айналса, онда (96) интегралын жеке-жеке аралықтарда қарастырып, (98) теңдеуіне келтіреді.

Мысалы, $0 \leq x \leq \pi$, $0 < s < x$ болғанда

$$\int_a^x \cos(x + s) \varphi(s) ds = f(x)$$

теңдеуін қарастырайық. Бұл теңдеуді x бойынша дифференциалдап, 2-текті теңдеуді аламыз:

$$\cos 2x \varphi(x) - \int_0^x \sin(x + s) \varphi(s) ds = f'(x).$$

Ал $\cos 2x = 0$ теңдеуінің түбірлері $x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \dots$. Егер $x \in \left(0, \left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ болса, онда $\cos 2x \neq 0$, сондықтан

$$\varphi(x) - \int_0^x \frac{\sin(x + s)}{\cos 2x} \varphi(s) ds = \frac{f'(x)}{\cos 2x}, \quad x \in \left(0, \left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

екінші текті теңдеуі шығады. Басқа нүктелер үшін де осы әдісті қолданамыз.

§ 6.2. Абель теңдеуі

$$\int_0^t \frac{\varphi(s)}{\sqrt{t-s}} ds = f(t)$$

Абель теңдеуін қарастырайық. Бұл теңдеуді t бойынша дифференциалдауға болмайды. Ядросы $K(t, s) = \frac{1}{\sqrt{t-s}}$ әлсіз ерекшелікті, сондықтан бұл теңдеуді 2-текті Вольтерра теңдеуіне басқаша келтіру әдісін қолданамыз. Ол үшін теңдеуді $\frac{1}{\sqrt{x-t}}$ өрнегіне көбейтіп, содан соң t бойынша 0-ден x -ке дейін интегралдап,

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} \left(\int_0^t \frac{\varphi(s)}{\sqrt{t-s}} ds \right) dt = \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}} dt$$

теңдеуін аламыз. Бұған Дирихленің интегралды түрлендіру формуласын қолданып,

$$\int_0^x \varphi(s) \left\{ \int_s^x \frac{dt}{\sqrt{(t-s)(x-t)}} \right\} ds = \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}} dt$$

деп жазып, мұнда $\int_s^x \frac{dt}{\sqrt{(t-s)(x-t)}} = \pi$ екенін пайдалансақ,

$$\int_0^x \varphi(s) ds = \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}} dt$$

теңдеуі шығады. Ал бұл теңдеуді x бойынша дифференциалдап,

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}} dt$$

бастапқы берілген теңдеудің шешімін табамыз. Егер $f(x)$ дифференциалданатын функция болса, онда соңғы формуладан

$$\varphi(x) = \frac{f(0)}{\pi\sqrt{x}} + \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{f'(s)}{\sqrt{x-s}} ds$$

болады.

Дәл осы жолмен Абельдің күрделі интегралдық теңдеуін

$$\int_0^x \frac{\varphi(s)}{(x-s)^\alpha} ds = f(x) \quad (0 \leq \alpha < 1) \quad (99)$$

шешуге болады. Ол үшін теңдеудегі x айнымалысын t -мен ауыстырып, одан кейін ол теңдеудің екі жағын $\frac{1}{(x-t)^{1-\alpha}}$ өрнегіне көбейтіп, t бойынша 0-ден x -ке дейін интегралдап,

$$\int_0^x \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \left(\int_0^t \frac{\varphi(s)}{(t-s)^\alpha} ds \right) = \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt$$

немесе

$$\int_0^x \varphi(s) \left(\int_s^x \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha} (t-s)^\alpha} \right) ds = \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt$$

теңдеуін аламыз. Бұл теңдеуден

$$\int_s^x \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha} (t-s)^\alpha} = \frac{\pi}{\sin \pi \alpha}$$

болғандықтан

$$\int_0^x \varphi(s) ds = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \cdot \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt$$

теңдеуі шығады. Осы соңғы теңдікті x бойынша дифференциалдап,

$$\varphi(x) = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt$$

(99) теңдеуінің шешімін табамыз.

• **Ескерту.** Егер (99) теңдеуіндегі α бірден кіші кез келген сан болса, онда кез келген жатық $f(x)$ функциясы үшін ол теңдеуді жоғарыда қарастырған жағдайға келтіре аламыз.

Расында, егер $\alpha < 0$ болса, онда $-\alpha > 0$. Сондықтан (99) теңдеуін x бойынша дифференциалдап,

$$(-\alpha) \int_0^x (x-s)^{-(\alpha+1)} \varphi(s) ds = f'(x),$$

$$\alpha(\alpha+1) \int_0^x (x-s)^{-(\alpha+2)} \varphi(s) ds = f''(x), \dots$$

теңдеулері тізбегін $1 > \alpha + k > \alpha$ болғанша жалғастыра береміз.

Ең соңында Вольтерраның 1-текті әлсіз ядорлы

$$\int_0^t \frac{H(t,s)}{(t-s)^\alpha} \varphi(s) ds = f(t) \quad (0 < \alpha < 1)$$

теңдеуін қарастырайық, мұндағы, $H(t,s)$ пен $\frac{\partial H(t,s)}{\partial t}$ үзіліссіз және шенелген функциялар. Бұл теңдеуді шешу үшін оны $\frac{1}{(x-t)^{1-\alpha}}$ өрнегіне көбейтіп, пайда болған өрнекті t бойынша 0-ден x -ке дейін интегралдап,

$$\int_0^x \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \int_0^t \frac{H(t,s)}{(t-s)^\alpha} \varphi(s) ds = \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt$$

немесе

$$\int_0^x \overline{H}(x,s) \varphi(s) ds = \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \quad (100)$$

теңдеуін аламыз, мұндағы,

$$\overline{H}(x,s) = \int_s^x \frac{H(t,s)}{(x-t)^{1-\alpha} (t-s)^\alpha} dt = \int_0^1 \frac{H(s+z(x-s),s)}{(1-z)^{1-\alpha} z^\alpha} dz,$$

ал бұл регулярлы ядро, себебі

$$|\overline{H}(x,s)| \leq M \int_0^1 \frac{dt}{(1-t)^{1-\alpha} t^\alpha} = \frac{M\pi}{\sin \pi\alpha}, \quad |H(x,s)| \leq M.$$

Демек, (100) теңдеуі шенелген ядорлы интегралдық теңдеу. Егер $H(x,x) \neq 0$ болса, онда $\overline{H}(x,x) \neq 0$. Сондықтан (100) теңдеуін 2-текті интегралдық теңдеуге келтіруге болады екен.

§ 6.3. Фредгольмнің бірінші текті теңдеуі

Фредгольмнің 1-текті

$$\int_a^b K(x,s) \varphi(s) ds = f(x) \quad (101)$$

теңдеуін қарастырайық. Бұндай теңдеу әрқашан шешіле бермейді. Мысалы $\int_0^1 \varphi(s) ds = f(x)$ теңдеуі кез келген $f(x)$ үшін шешіле бермейді. Егер бұл теңдеуде $f(x) = 1$ болса, оның шешімі $\varphi(x) = 1$ болады. Онымен қоса $\varphi(x) = 1 + \alpha x + \beta$ функцияда α мен β тұрақты шамалары $\alpha + 2\beta = 0$ шартын қанағаттандырса, онда теңдеу шешіледі, яғни теңдеудің ақырсыз көп шешімі бар болады.

Егер (101) теңдеуіндегі $K(x,s)$ симметриялық ядро болса, онда Шмидт теоремасы бойынша

$$\int_a^b K(x,s) \varphi(s) ds = 0$$

1-текті интегралдық теңдеудің шешімдері $K(x,s)$ ядросының барлық меншікті функцияларына ортогональ функциялармен дәл келеді. Егер $K(x,s)$ тұйық ядро болса, бұл теңдеудің тек нөлдік шешімі ғана бар болады. Егер ядро тұйық болмаса

(мәселен, ерекшеленген ядро болса), онда теңдеудің акырлы немесе санакты жиында сызықты тәуелсіз жиында, сызықты тәуелсіз шешімдері бар болады.

Енді $f(x) \neq 0$ болған кездегі (101) теңдеуін қарастырайық. Гильберт-Шмид теоремасы бойынша (101) теңдеуінің шешімі бар болуы үшін $f(x)$ функциясы $K(x,s)$ ядросының меншікті функциялары $\{\varphi_i(x)\}$ жүйесі бойынша қатарға жіктелуі қажет, яғни

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (f, \varphi_i) \varphi_i(x).$$

Міне, осы шарт орындалса, (101) теңдеуінің шешімін

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(x)$$

түрінде іздеуге болады, мұндағы, c_i - белгісіз тұрақты шамалар. Соңғы қатар-ды (101) теңдеуіне қойып, оны алдыңғы қатармен салыстырсақ, $\frac{c_i}{\lambda_i} = (f, \varphi_i)$, яғни $c_i = \lambda_i (f, \varphi_i)$, $i = 1, 2, \dots$

Теорема (Пикар). Тұйық симметриялық $K(x,s)$ ядролы

$$\int_a^b K(x,s) \varphi(s) ds = f(x) \quad (101)$$

1-текті интегралдық теңдеуінің $L_2[a,b]$ класында жалғыз шешімі бар болуы үшін

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 f_k^2$$

қатарының жинақты болуы қажетті де жеткілікті. Мұндағы $f_k = (f, \varphi_k)$, $f(x) \in L_2[a,b]$ ал λ_k сандары $K(x,s)$ ядросының меншікті мәндері, $\varphi_k(x)$ – оларға сәйкес меншікті функциялары.

Дәлелдеуі. Қажеттілігі: (101) теңдеуінің $\varphi(x) \in L_2[a,b]$ да шешімі бар деп ұйғарайық. Онда,

$$\begin{aligned} f_k &= \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx = \int_a^b \left\{ \int_a^b K(x,s) \varphi(s) ds \right\} \varphi_k(x) dx = \\ &= \int_a^b \left\{ \int_a^b K(x,s) \varphi_k(x) dx \right\} \varphi(s) ds = \frac{1}{\lambda_k} \int_a^b \varphi(s) \varphi_k(s) ds. \end{aligned}$$

Бұл теңдікті

$$\int_a^b \varphi(s) \varphi_k(s) ds = \lambda_k f_k \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (102)$$

түрінде жазамыз. Бұдан $\lambda_k f_k$ сандардың $\varphi(x) \in L_2[a, b]$ функциясы үшін Фурье қатарының коэффициенттері екенін көреміз. Бессель теңсіздігі бойынша

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 f_k^2 \leq \int_a^b \varphi^2(x) dx,$$

демек, қатар жинақты.

Жеткіліктілігі: керісінше, қатар жинақты болсын, онда Фишер-Рисс теоремасы бойынша жалғыз ғана $\varphi(x) \in L_2[a, b]$ функциясы табылады, ол үшін $\{\varphi_k(x)\}$ жүйесі бойынша $\lambda_k f_k$ Фурье коэффициенттері болады, яғни (102) теңдігі орынды. Ал $f(x) \in L_2[a, b]$ функциясы қатарға

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \varphi_n(x)$$

түрінде жіктеледі.

Екінші жағынан (102) теңдігін ескерсек,

$$\begin{aligned} \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds, \varphi_n(x) \right) \varphi_n(x) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b \varphi(s) \int_a^b K(x, s) \varphi_n(x) dx ds \right) \varphi_n(x) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \left(\int_a^b \varphi(s) \varphi_n(s) ds \right) \varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \varphi_n(x). \end{aligned}$$

Олай болса, соңғы екі теңдіктерден

$$f(x) = \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds,$$

яғни $\varphi(x)$ функциясы (102) теңдеуін қанағаттандырады және оның шешімі болады.

Егер $K(x, s)$ ядросы тұйық болмаса, онда (101) теңдеуінің шешімі көп болады. $\omega(x) \neq 0$ және $\int_a^b K(x, s) \omega(s) ds = 0$ болсын. Ол кезде, егер $\varphi_0(x)$ функциясы (101) теңдеуінің шешімі болса, онда $\varphi_0(x) + c \omega(x)$ функциясы да ол теңдеудің шешімі болады (мұндағы, c – тұрақты шама). $K(x, s)$ – ерек-шеленген ядро болса, ол тұйық емес, сондықтан (101) теңдеуінің шешімі ақырсыз көп тұрақты шамаларға байланысты болады. Ал (101) теңдеуінің шешімі бар және ол жалғыз болуы үшін $K(x, s)$ ядросының тұйық болуы өте маңызды.

Фредгольмнің кейбір I-текті теңдеулерін шешу үшін біртіндеп жуықтау әдісін қолдануға болады.

Теорема. (101) теңдеуінің ядросы $K(x, s) \in L_2[a, b]$ симметриялық және оң болып, ол теңдеу бір мәнді шешілсін. Сонда

$$\varphi_n(x) = \varphi_{n-1}(x) + \lambda \int_a^b \left[f(x) - \int_a^b K(x, s) \varphi_{n-1}(s) ds \right] dx \quad (103)$$

рекурренттік формуласымен анықталатын $\{\varphi_n(x)\}$ тізбегі (101) теңдеуінің шешіміне орташа жинақты болады, мұндағы, $\varphi_0(x) \in L_2[a, b]$ λ саны $0 < \lambda < 2\lambda_2$ шартты қанағаттандырады, ал $\lambda_1 - K(x, s)$ ядросының ең кіші меншікті мәні.

Дәлелдеуі. (103) теңдігіне $\varphi_n(x) = \varphi(x) + \psi_n(x)$ деп алсақ,

$$\psi_n(x) = \psi_{n-1}(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \psi_{n-1}(s) ds$$

өрнегін аламыз. Мұның екі жағында $K(x, s)$ ядросының меншікті функциялары $v_i(x)$ -ке көбейтіп, x бойынша a -дан b -ға дейін интегралдасақ,

$$a_i^{(n)} = a_i^{(n-1)} - \lambda \int_a^b v_i(x) \left(\int_a^b K(x, s) \psi_{n-1}(s) ds \right) dx,$$

мұнда

$$a_i^{(n)} = \int_a^b \psi_n(x) v_i(x) dx.$$

Енді $K(x, s)$ ядросы симметриялық ядро екенін ескеріп және

$$v_i(x) = \lambda_i \int_a^b K(x, s) v_i(s) ds$$

теңдігін пайдаланып,

$$\int_a^b v_i(x) \left\{ \int_a^b K(x, s) \psi_{n-1}(s) ds \right\} dx = \frac{1}{\lambda_i} a_i^{(n-1)}$$

өрнегін аламыз. Сонымен

$$a_i^{(n)} = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i} \right) a_i^{(n-1)} = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i} \right)^n a_i^{(0)}.$$

Мынадай

$$\int_a^b \psi_n^2(x) dx = \int_a^b [\varphi_n(x) - \varphi(x)]^2 dx$$

интегралды қарастырайық. $\{v_i(x)\}$ жүйенің толықтығын ескерсек,

$$\int_a^b \psi_n^2(x) dx = \sum_{i=1}^n (a_i^{(n)})^2 \quad (\text{Парсеваль теңдігі})$$

немесе

$$\int_a^b \psi_n^2(x) dx = \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right)^{2n} (a_i^{(0)})^2 \quad (n=1,2,\dots)$$

ал $0 < \lambda < 2\lambda_2$ теңсіздігінен $\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right)^2 \leq 1$. Сондықтан $\varepsilon > 0$ үшін $N = N(\varepsilon)$ нөмірі табылып, $n > N(\varepsilon)$ болғанда

$$\sum_{i=1}^n (a_i^{(n)})^2 < \varepsilon$$

болады. Демек,

$$\int_a^b [\varphi_n(x) - \varphi(x)]^2 dx = \int_a^b \psi_n^2(x) dx < \varepsilon,$$

яғни $\{\varphi_n(x)\}$ тізбегі интегралдық теңдеудің шешімі $\varphi(x)$ функциясына орташа жинақты.

Мысалы. Біртекті интегралдық

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 (5xt^3 + 4x^2t + 3xt) \varphi(t) dt$$

теңдеуінің меншікті мәндері мен меншікті функцияларын табайық.

Шешуі. Теңдеуді басқаша жазайық:

$$\varphi(x) = 5\lambda x \int_{-1}^1 t^3 \varphi(t) dt + \lambda(4x^2 + 3x) \int_{-1}^1 t \varphi(t) dt,$$

одан кейін

$$c_1 = \int_{-1}^1 t^3 \varphi(t) dt, \quad c_2 = \int_{-1}^1 t \varphi(t) dt$$

деп белгілесек, берілген теңдеуді: $\varphi(x) = 5\lambda c_1 x + \lambda c_2 (4x^2 + 3x)$. деп жазамыз. Бұл өрнектің екі жағында x^3 пен x -ке көбейтіп, x бойынша -1 -ден $+1$ -ге дейін интегралдап,

$$c_1 = \int_{-1}^1 x^3 \varphi(x) dx = 2c_1 \lambda + \lambda c_2 \frac{6}{5},$$

$$c_2 = \int_{-1}^1 x \varphi(x) dx = 5\lambda c_1 \frac{2}{3} + \lambda c_2 \frac{6}{3}$$

немесе c_1 мен c_2 -ні анықтайтын $5c_1(1-2\lambda) - 6\lambda c_2 = 0$, $-10\lambda c_1 + 3(1-2\lambda)c_2 = 0$ теңдеулер жүйесін аламыз. Бұл жүйенің нөлдік емес шешімі бар болуы үшін

$$\begin{vmatrix} 5(1-2\lambda) - 6\lambda \\ -10\lambda & 3(1-2\lambda) \end{vmatrix} = 0,$$

яғни $\lambda = \frac{1}{4}$ болуы керек. Міне бұл $\lambda = \frac{1}{4}$ саны жоғарыдағы теңдеудің ядросының меншікті мәні, ал меншікті функцияны табу үшін жүйеге λ -ның мәнін қойып, $c_1 = 0,6c_2$ екенін табамыз. Бұл c_1 -ді пайдаланып, $\varphi(x) = c_2(1,5x + x^2)$ берілген теңдеу ядросының меншікті функциясы екенін анықтаймыз. Егер соңғы теңдікке $c_2 = 1$ деп мәнін қойсақ, онда меншікті функция $\varphi(x) = x^2 + 1,5x$ болады.

§6.4. Ядросы симметриялық емес I-текті интегралдық теңдеулер

Симметриялық емес $H(x,s) \in L_2[a,b]$ ядросы

$$H(x,s) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} \varphi_i(x) \psi_i(s)$$

бисызықты қатарына жіктелсін. Онда $\int_a^b H(x,s) \varphi(s) ds = 0$ интегралдық теңдеуінің шешімдері барлық $\varphi_k(x)$ функцияларына ортогональ функциялар болады. Міне, бұдан Шмидт ядросы тұйық болса, теңдеудің тек нөлдік шешімі ғана бар болатыны және егер ядро тұйық болмаса, онда ол теңдеудің ақырлы немесе санақты жиынды, сызықты тәуелсіз нөлге тең емес шешімдері бар болатыны шығады.

Теорема. Біртекті емес

$$\int_a^b H(x,s) \varphi(s) ds = f(x) \quad (104)$$

теңдеуінің $L_2[a,b]$ класында шешілуі үшін бұл теңдеудегі бос мүше $f(x)$ Шмидт-тің $K_1(x,s)$ ядросының меншікті функциялары $\varphi_k(x)$ арқылы

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \varphi_k(x) \quad (105)$$

орташа жинақты қатарына жіктелуі және

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 f_k^2 \quad (106)$$

катарының жинақты болуы қажетті де, жеткілікті. Осы шарттар орындалған кезде (104) теңдеуінің шешімі

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^x \lambda_k \varphi_k \psi_k(x)$$

түрінде өрнектеледі, мұндағы, $\varphi_0(x)$ – жоғардағы (103) теңдеуінің кез келген шешімі.

Дәлелдеуі. Егер (104) теңдеуінің шешімі $\varphi(x) \in L_2[a, b]$ болса, онда $f(x) \in L_2[a, b]$. Сондықтан Шмидт теоремасы бойынша $f(x) \in L_2[a, b]$ функциясы (105) қатарына жіктеледі. Бессель теңсіздігі бойынша (106) қатары жинақты болады және керісінше, егер (106) қатары жинақты болса, онда Рисс-Фишер теоремасы бойынша $\varphi(x) \in L_2[a, b]$ функциясы табылып және $\lambda_k f_k$ Фурье коэффициенттері болады, яғни

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k \psi_k(x)$$

теңдігі орынды. Бұл теңдікпен анықталған $\varphi(x)$ функциясы (104) теңдеуін қанағаттандыратынын оңай тексеріп көруге болады.

§6.5. Фредгольмнің 1-текті қисынсыз интегралдық теңдеуі

1. Қисынсыз қойылған есеп туралы ұғым. $A\varphi = f$ теңдеуінің A және f белгілі болған жағдайдағы φ шешуін табу есебін қарастырайық. Есепті қисынды немесе қисынсыз қою жағдайларын да қарастырайық. Бірінші рет бұл ұғымдарды Жак Адамар енгізді.

φ мен f функцияларды метрикалық Φ және F кеңістіктерінің элементтері болып, оларда сәйкес $\rho_{\Phi}(\varphi_1, \varphi_2)$ және $\rho_F(f_1, f_2)$ түріндегі метрикаларды анықталсын. Әдетте, метрика ұғымы есептің қойылуына байланысты анықталады.

$\varphi = R(f)$ түрінде теңдеудің шешімі ұғымы анықталсын.

Егер $\forall \varepsilon > 0$ санына сәйкес $\delta(\varepsilon) > 0$ саны табылып, $\rho_F(f_1, f_2) < \delta(\varepsilon)$ теңсіздігінен $\rho_{\Phi}(\varphi_1, \varphi_2) \leq \varepsilon$ болса, онда φ орнықты шешім делінеді, мұндағы, $f_1, f_2 \in F$, ал $\varphi_1(x) = R_1(f_1) \in \Phi, \varphi_2(x) = R(f_2) \in \Phi$.

Егер (Φ, F) қос метрикалық кеңістікте: 1) $\forall f \in F$ үшін оның шешімі $\varphi \in \Phi$ бар болса; 2) шешім жалғыз, бірімәнді анықталса; 3) шешім үшін орнықтылық шарттары орындалса, онда $A\varphi = f$ есебі қисынды қойылған есеп деп аталады. Бұл шарттардың кемінде біреуін қанағаттандырмайтын есептер қисынсыз есептер деп аталады. Бұл қисынсыз қойылған есеп ұғым тек (F, Φ) қос метрикалық кеңістік үшін орынды, себебі басқа кеңістікте бұл есеп қисынды қойылған болуы мүмкін.

Мысал үшін $[a, b]$ кесіндісінде берілген $f(x)$ функциясының туындысы болатын $\varphi(x)$ функциясын анықтау мәселесін алуға болады:

$$\varphi = \frac{df}{dx}.$$

$f_1(x)$ функциясының туындысы $\varphi_2(x)$ болсын. $f_2(x) = f_1(x) + N \sin \omega x$ функциясы C метрикасында $f_1(x)$ функциясынан $\rho_c(f_1, f_2) = |N|$ шамамен айырмашылықта болады, мұндағы, ω кез келген аз шама. Бірақ $\varphi_2(x) = \frac{df_2}{dx}$ туындысы C метрикасы бойынша $\varphi_1(x)$ -тен $\rho(\varphi_1, \varphi_2) = |N\omega|$ айырмашылықта болады және ол айырманы $|\omega|$ параметрінің жеткілікті мөлшердегі үлкен мәні үшін үлкен етуге болады.

Демек, шешімнің орнықтылық шарттары орындалмай жатыр.

Егер $f_1(x)$ мен $f_2(x)$ функциясының арақашықтығы C^1 метрикасымен, яғни $\rho_c(f_1, f_2) = \max \left\{ \sup_{[a,b]} |f_1(x) - f_2(x)|, \sup_{[a,b]} |f_1'(x) - f_2'(x)| \right\}$ немесе

$$\rho_c(f_1, f_2) = \sup_{x \in [a,b]} \left\{ |f_1(x) - f_2(x)| + |f_1'(x) - f_2'(x)| \right\}$$

формуласымен, ал $\varphi_1(x)$ пен $\varphi_2(x)$ функциясының арақашықтығы C метрикасымен берілсе, онда бұл қашықтықтар өзара $\rho_c(\varphi_1, \varphi_2) \leq \rho_c(f_1, f_2)$ қатынасында болады, мұндағы, $\varphi_1(x) = \frac{df_1}{dx}$, $\varphi_2(x) = \frac{df_2}{dx}$, демек, $f \in C^1$ функциясының аз өзгеруі $\varphi \in C$ функциясын аз өзгертеді, яғни қарастырылып жатқан есеп орнықты.

Енді Фредгольмнің 2-текті

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds + f(x) \quad (107)$$

теңдеуін қарастырайық. Мұның ядросы $K(x, s)$ үзіліссіз функция, ал λ ол ядроның меншікті мәні болмасын. Онда (107) теңдеуінің жалғыз ғана шешімі болады, ол:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, s; \lambda) f(s) ds$$

түрінде жазылады. Мұндағы, $R(x, s; \lambda)$ – үзіліссіз функция. Міне, осы тұжырымдардан бұл теңдеуді шешу есебі орнықты, яғни $f(x)$ - функциясының аз өзгеруіне $\varphi(x)$ функциясының да аз өзгеруі сәйкес келеді. Сонымен (107) есебі қисынды қойылған.

2. Фредгольмнің 1-текті теңдеуі қисынсыз есеп. Бірінші текті Фредгольм теңдеуін

$$\int_a^b K(x, s)\varphi(s)ds = f(x) \quad (108)$$

қарастырайық. Мұндағы, $K(x, s)$ ядросы үзіліссіз және дифференциалданатын болсын. (108) теңдеуі шешімінің орнықтылық мәселесімен шұғыл-данайық.

Жаңа $\psi(x) = \varphi(x) + \cos \omega x$ функциясын енгізейік, мұнда ω параметр. Бұл функцияны (108) теңдеуіндегі $\varphi(x)$ пен ауыстырсақ,

$$\int_a^b K(x, s)[\psi(s) - \cos \omega s]ds = f(x).$$

Бұдан

$$\int_a^b K(x, s)\psi(s)ds = f(x) + \int_a^b K(x, s)\cos \omega s ds \equiv f(x) + g(x)$$

немесе

$$\int_a^b K(x, s)\psi(s)ds = f(x) + K(x, s)\frac{\sin \omega s}{\omega} \Big|_a^b - \int_a^b K'_s(x, s)\frac{\sin \omega s}{\omega} ds$$

Әрине, $\sup|f(x) - g(x)| < \frac{C}{\varepsilon}$ мұнда, $C - \omega$ - ға байланыссыз тұрақты шама.

Сондықтан ω жеткілікті дәрежеде үлкен болса, $\rho_c(f, g) = \sup_{[a, b]}|f(x) - g(x)|$ өте аз шама болады. Екінші жағынан, $\rho_c(\varphi, \psi) = \sup|\cos \omega x| = 1$, яғни бұл шама өте аз емес, міне, осы екі нәтиже (108) интегралдық теңдеуінің қисынсыздығын көрсетеді, яғни оның шешімі орнықты болмайды.

2. Фредгольмнің 1-текті теңдеуі қисынсыз есеп. Бірінші текті Фредгольм теңдеуін

$$\int_a^b K(x, s)\varphi(s)ds = f(x) \quad (108)$$

қарастырайық. Мұндағы $K(x, s)$ ядросы үзіліссіз және дифференциалданатын болсын. (108) теңдеуі шешімінің орнықтылық мәселесімен шұғылданаық.

Жаңа $\psi(x) = \varphi(x) + \cos \omega x$ функциясын енгізейік, мұнда ω параметр. Бұл функцияны (108) теңдеуіндегі $\varphi(x)$ пен ауыстырсақ,

$$\int_a^b K(x, s)[\psi(s) - \cos \omega s]ds = f(x).$$

Бұдан

$$\int_a^b K(x,s)\psi(s)ds = f(x) + \int_a^b K(x,s)\cos \omega s \equiv f(x) + g(x)$$

немесе

$$\int_a^b K(x,s)\psi(s)ds = f(x) + K(x,s)\frac{\sin \omega s}{\omega} \Big|_a^b - \int_a^b K'_s(x,s)\frac{\sin \omega s}{\omega} ds.$$

Әрине, $\sup|f(x) - g(x)| < \frac{C}{\omega}$ мұнда C — ω -ға байланыссыз тұрақты шама.

Сондықтан ω жеткілікті дәрежеде үлкен болса, $\rho_c(f, g) = \sup_{[a,b]}|f(x) - g(x)|$ өте аз шама болады. Екінші жағынан $\rho_c(\varphi, \psi) = \sup|\cos \omega x| = 1$, яғни бұл шама өте аз емес, міне осы екі нәтиже (108) интегралдық теңдеуінің қисынсыздығын көрсетеді, яғни оның шешімі орнықты болмайды.

3. Меншікті мәндер мен меншікті функциялардың экстремальдық қасиеттері. Гильберт-Шмидт теоремасы бойынша, кез келген $h(x) \in L_2[a, b]$ үшін

$$Kh \equiv \int_a^b K(x,s)h(s)ds = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{\lambda_n} \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(h, \varphi_n)}{\lambda_n} \varphi_n(x)$$

теңдігі орынды, мұндағы, $K(x,s) \in L_2(a,b)$ ал λ_n -дер оның меншікті мәндері. Бұл теңдіктің оң жағында тұрған қатар орташа жинақты болғандықтан, оны $h(x)$ -ке скаляр көбейтуге болады, яғни

$$(Kh, h) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{h_n}{\lambda_n} \varphi_n, h \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{\lambda_n} (\varphi_n, h) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(h, \varphi_n)^2}{\lambda_n}.$$

$K(x,s)$ ядросының меншікті мәндері λ_n сандары абсолют шамаларының өсу ретімен орналассын, яғни $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots$ болсын, ал λ_1 абсолют шамасы бойынша ең кішісі дейік. Онда соңғы теңдіктен

$$(Kh, h) \leq \frac{1}{|\lambda_1|} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |(h, \varphi_n)|^2.$$

Егер бұл теңсіздікке Бессель теңсіздігін

$$\sum_{n=1}^{\infty} (h, \varphi_n)^2 \leq \int_a^b h^2(x)dx = \|h\|^2$$

пайдалансақ, онда

$$|(Kh, h)| \leq \frac{\|h\|^2}{|\lambda_1|} \leq \frac{1}{|\lambda_1|}, \|h\| = 1$$

қатысы шығады.

Ал $h(x)$ функциясы бірінші меншікті функция $\varphi_1(x)$ -ке тең болса, онда осы теңсіздік тепе-теңдікке айналады. Расында, $h(x) = \varphi_1(x)$ болса, онда $\varphi_1(x) = \lambda K \varphi_1$ тепе-теңдігінен

$$(K\varphi_1, \varphi_1) = \frac{\|\varphi_1\|^2}{\lambda_1} = \frac{1}{\lambda_1}$$

өрнегін аламыз. Сонымен мынадай тұжырымды дәлелдедік.

Теорема. Нормаланған функциялар жиынында (Kh, h) скаляр шамасы өзінің ең жоғарғы шамасына ие, ол $\frac{1}{|\lambda_1|}$ -ге тең ал максимум мәніне $h(x) = \varphi_1(x)$ болғанда жетеді.

Енді $K(x, s)$ ядросының меншікті функциялары $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{m-1}(x)$ ортогонал болатын нормаланған функциялар жиынын қарастырайық, яғни $\|h(x)\| = 1, (h, \varphi_1) = (h, \varphi_2) = \dots = (h, \varphi_{m-1}) = 0$ болсын. Онда берілген теңдіктен

$$Kh = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(h, \varphi_n)}{\lambda_n} \varphi_n(x)$$

теңдігін аламыз. Бұл өрнекке жоғарыдағы түрлендірулерді қайталасақ,

$$|(Kh, h)| \leq \frac{\|h\|^2}{|\lambda_1|}, \quad (K\varphi_m, \varphi_m) = \frac{\|\varphi_m\|^2}{\lambda_m} = \frac{1}{\lambda_{m1}}, \quad h = \varphi_m(x)$$

қатынасын аламыз. Сондықтан мына теорема орынды.

Теорема. Нормаланған функциялар жиынында ортогонал $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{m-1}(x)$ функциялар жиыны үшін (Kh, h) шамасы өзінің ең үлкен мәніне ие болады, ол $\frac{1}{|\lambda_m|}$ -ге тең, ал $h(x) = \varphi_m(x)$ болғанда максимум мәніне жетеді.

• **Ескерту.** Симметриялық интегралдық теңдеулердің меншікті мәндері мен меншікті функцияларын вариациялық әдістерді пайдаланып табу, әдетте, осы теоремаларға негізделген.

7. ИНТЕГРАЛДЫҚ ТҮРЛЕНДІРУЛЕР МЕН ТЕНДЕУЛЕР

Математикалық физиканың көптеген есептерін шешу мәселесі арнайы ядролы интегралдық тендеулерді шешуге алып келеді. Бұндай тендеулерді интегралдық түрлендірулер әдістерімен шешу ыңғайлы. $f(x)$ функциясы шектелген немесе шектелмеген (a,b) облысында анықталған болсын. $f(x)$ функциясын интегралдық түрлендіру деп

$$\tilde{f}(t) = \int_a^b K(x,t)f(x)dx$$

өрнегін айтамыз, мұнда белгілі $K(x,t)$ функциясы түрлендірудің ядросы делінеді, ол әрбір түрлендіру үшін әртүрлі болады.

Практикалық есептерде Фурье, Лаплас, Меллин, Бессель түрлендірулері қолданылады. Бұл түрлендірулерге арналған толып жатқан ғылыми мақалалар және оқулық әдебиеттер бар. Біз бұл тарауда ол түрлендірулердің тек интегралдық тендеулерді шешу үшін қажеттілерін ғана келтіреміз.

§7.1. Фурье түрлендіруі және оның интегралдық тендеулерге қолдану

1. Фурьенің интегралдық түрлендіруі түсінігі. Белгілі функция $f(x) \in L_1(-\infty, +\infty)$ және кез келген шенелген кесіндіде Дирихле шартын қанағаттандырса, онда математикалық анализ курсінде

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos t(x-\xi) d\xi \quad (109)$$

формуласының орынды екенін дәлелдейді. Егер $f(x)$ үзіліссіз функция болса, онда $f(x+0) + f(x-0) = 2f(x)$. (109) теңдігін Фурьенің интегралдық формуласы, ал оның оң жағын Фурье интегралы деп айтады.

(109) формуласын комплекс айнымалы үшін

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i(x-\xi)t} d\xi \quad (110)$$

түрінде жазуға болады. (110) теңдігін мына екі өрнек

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-it\xi} d\xi, \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t) e^{itx} dt$$

түрінде жазуға болады, бұл өрнектерді Фурьенің интегралдық түрлендірулері деп айтады. Мұндағы соңғы интегралды Коши бойынша интегралдың бас мәні мағынасында қабылдаймыз. Бірінші теңдікті функцияны тура түрлендіру, ал екінші теңдікті кері түрлендіру деп айтады.

(109) интегралдық формуласынан Фурьенің синус және косинус түрлендірулерін алуға болады:

а) Егер $(-\infty, +\infty)$ аралығында $f(x)$ тақ функция болса, онда тақ функциядан $(-\infty, +\infty)$ аралығы бойынша алынған интегралдың нөлге айналатынын ескерсек,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) [\cos xt \cos t\xi + \sin tx \sin t\xi] d\xi = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} dt \int_0^{\infty} f(\xi) \sin tx \sin t\xi d\xi. \end{aligned}$$

Бұдан

$$\tilde{f}_s(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) \sin t\xi d\xi$$

деп белгілеп,

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \tilde{f}_s(t) \sin tx dt$$

өрнегін шығарамыз. Бұл формулаларды сәйкес түрде Фурьенің тура және кері синус түрлендірулері деп атайды;

ә) Егер $f(x)$ функция $(-\infty, +\infty)$ аралығында жұп болса, жоғарыдағыдай жолмен

$$\tilde{f}_c(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) \cos \xi d\xi$$

деп белгілеп,

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \tilde{f}_c(t) \cos tx dt$$

түріндегі Фурьенің косинус түрлендіруін аламыз.

2. Фурье түрлендіруінің кейбір қасиеттері. Ыңғайлы болуы үшін Фурьенің $f(x)$ функциясын тура түрлендіруді $F[f]$, ал кері түрлендіруді $F^{-1}[f]$ символдармен белгілейік.

1) Егер $f(x) \in L_1(-\infty, +\infty)$ болса, онда

$$F^{-1}[F[f]] = F[F^{-1}[f]] = f \quad (111)$$

(111) формуласы (110) теңдігінің басқаша жазылған түрі.

2) L_1 жиында F және F^{-1} түрлендірулері өзара бірмәнді түрлендірулер, яғни $f_1 = f_2 \Leftrightarrow F[f_1] = F[f_2]$ ($F^{-1}[f_1] = F^{-1}[f_2]$).

Дәлелдеуі. Егер $f_1 = f_2$ болса, онда $f_1 - f_2 = 0$. Бұдан $F[f_1 - f_2] = 0$ F түрлендіруінің сызықты болуына байланысты $F[f_1 - f_2] = F[f_1] - F[f_2]$ немесе $F[f_1] = F[f_2]$. Керісінше, егер $F[f_1] = F[f_2]$ болса, онда F^{-1} түрлендіруді қолданып, $F^{-1}[F[f_1] - F[f_2]] = 0$ немесе $F^{-1}[F[f_1]] = F^{-1}[F[f_2]]$ өрнегін аламыз. Одан кейін бұл соңғы теңдікке (111) формуласын пайдалансақ, $f_1 = f_2$ екені шығады.

3) Егер $f(x) \in L_1(-\infty, +\infty)$ болса, онда $F[f]$ функциясы барлық сандық осьте шектелген және бірқалыпты үзіліссіз. Бұл тұжырымның дұрыстығы

$$|F[f]| = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\xi x} d\xi \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)| d\xi$$

теңсіздігінен көрінеді.

Мына төмендегі қасиеттер интегралдық теңдеулерді шешуде көп қолданылады.

4) $f_1(x)$ және $f_2(x)$ функциялары $(-\infty, +\infty)$ аралығында шектелген, үзіліссіз және абсолютті интегралданатын болсын. Сонда

$$F(f_1 * f_2) = \sqrt{2\pi} F[f_1] F[f_2], \quad (112)$$

мұнда

$$f_1 * f_2 = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(x - \xi) d\xi; \quad (113)$$

Оны $f_1(x)$ пен $f_2(x)$ функциялардың ұйысуы деп атайды. Ұйысу операциясы үшін төмендегі қасиеттердің орынды екенін оңай көруге болады.

а) Егер $f_1(x)$ пен $f_2(x)$ функциялары $(-\infty, +\infty)$ аралығында шектелген, үзіліссіз және абсолютті интегралданатын болса, онда $f_1 * f_2$ сол аралықта шектелген, үзіліссіз және абсолютті интегралданатын болады.

ә) Функциялардың ұйысу операциясы коммутативті және ассоциативті.

а) қасиеті бойынша $f_1 * f_2$ өрнегін Фурье түрлендіруін қолдануға болады:

$$F[f_1 * f_2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(x - \xi) d\xi \right\} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^x f_1(\xi) \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\xi}^x f_2(x-\xi) e^{-i\lambda x} dx \right\} d\xi \Big|_{x=t-\xi} = \\
&= \int_{-\infty}^x f_1(\xi) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\xi}^{\xi} f_2(t) e^{-i\lambda t} dt \right\} e^{-i\lambda \xi} d\xi = \int_{-\infty}^x f_2(t) e^{-i\lambda t} dt, \\
&\quad \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^x f_1(\xi) e^{-i\lambda \xi} d\xi = \sqrt{2\pi} F[f_1] F[f_2].
\end{aligned}$$

5) $f(x), f'(x) \in L_1(-\infty, +\infty)$ болсын, оның үстіне $|x| \rightarrow \infty$ жағдайында $f(x), f'(x) \rightarrow 0$ және $g(x) \in L_1(-\infty, +\infty)$ делік. Сонда

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t)\tilde{g}(t)dt \quad (114)$$

теңдігі орынды. Бұл өрнекті Парсевальдің күрделі теңдігі деп атайды.

Дәлелдеуі. Берілген шарттан $f(x)$ үшін $\tilde{f}(t)$ анықталады және $|\tilde{f}| \leq C(1 + |t|)^{-2}$ теңсіздігі шығады.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t) e^{itx} dt$$

өрнегінің екі жағын $g(x)$ функциясына көбейтіп, одан кейін x бойынша $-\infty$ -тен $+\infty$ ке дейін интегралдап,

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \tilde{f}(t) e^{itx} dt \right\} g(x) dx = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t) \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-itx} dx \right\} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(t)\tilde{g}(t)dt
\end{aligned}$$

екенін, яғни (114) формуласының дұрыстығын дәлелдейміз. (114) теңдігінде $f(x) = g(x)$ деп ұйғарып,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}^2(t)dt \Rightarrow \|f\|_{L_2} = \|\tilde{f}\|_{L_2}$$

тепе-теңдіктерін аламыз.

3. Фурьенің интегралдық теңдеуі. Фурьенің өзара қос түрлендіруінің әрбірін сол интеграл ішіндегі функцияның теңдеуі, ал екіншісін оның шешімі ретінде қарауға болады. Бұл жағдайда жоғарыда талқылаған Фредгольм теоремалары дұрыс болмауы мүмкін. Мысалы Фурьенің косинус түрлендіруін қарастырайық:

$$f_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) \cos x\xi d\xi, \quad f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_1(\xi) \cos x\xi d\xi.$$

Бұл өрнектерді бір-біріне қоссақ,

$$f_1(x) + f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} [f(\xi)] + f_1(\xi) \cos x\xi d\xi$$

теңдігі шығады. Бұдан жоғарғы айтылған шарттарды қанағаттандыратын $f(x)$ функциясын қалай алсақ та $\varphi(x) = f(x) + f_1(x)$ функциясы

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^{\infty} \varphi(\xi) \cos x\xi d\xi \quad (115)$$

интегралдық теңдеуінің $\lambda = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ меншікті санына сәйкес меншікті функциясы болады. Мәселен, $f(x)$ функциясын $f(x) = e^{-\alpha x}$ ($\alpha > 0$) деп алсақ,

$$f_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\alpha \xi} \cos \xi x d\xi = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2}.$$

Демек, $\lambda = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ меншікті санына (115) интегралдық теңдеуінің

$$e^{-\alpha x} + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2}$$

түріндегі $\alpha > 0$ параметрлеріне байланысты ақырсыз көп шешімдер жиыны сәйкес келетіні шығады, яғни параметр $\lambda = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ рангілі ақырлы сан емес.

1-мысал. Жұқа иілгіш пластинканың тербелуі туралы есептің шешімі

$$f(x) = \frac{1}{2bx} \int_0^{\infty} t \sin \frac{t^2}{4bx} \varphi(t) dt$$

интегралдық теңдеуге келеді, мұнда $\varphi(x)$ -белгісіз функция, ал $f(x)$ -белгілі функция. Бұл Фредгольмнің 1-текті интегралдық теңдеуі. Бұнда $t^2 = \tau$, $x = \frac{1}{4bv}$ деп айнымалыларды ауыстырсақ, теңдеу

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{v} f\left(\frac{1}{bv}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \varphi(\sqrt{\tau}) \sin v\tau d\tau$$

түріне келеді. Оған кері синус түрлендірудің формуласын қолданып,

$$\varphi(\sqrt{\tau}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{v} f\left(\frac{1}{4bv}\right) \sin v\tau d\tau$$

өрнегін аламыз. Енді бұдан бұрынғы айнымалыларға көшсек,

$$\varphi(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{x} \sin \frac{t^2}{4bx} f(x) dx$$

жоғарыдағы теңдеудің шешімін анықтаймыз.

4. Ядро аргументтерінің айырымына байланысты Фредгольмнің интегралдық теңдеуі. Мынадай

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x-s) \varphi(s) ds + f(x) \quad (116)$$

ядро аргументтерінің айырымына байланысты интегралдық теңдеуді қарастырайық. $K(x, s), f(x), \varphi(x) \in L_2(-\infty, +\infty)$ болсын. Қарастырып отырған (116) теңдеуінің екі жағына да жоғарыдағы (113) формуласы бойынша Фурье түрлендіруін қолдансақ, $\tilde{\varphi}(t) = \lambda \sqrt{2\pi} \tilde{K}(t) \tilde{\varphi}(t) = \tilde{f}(t)$, бұдан

$$\tilde{\varphi}(t) = \frac{\tilde{f}(t)}{1 - \lambda \sqrt{2\pi} \tilde{K}(t)}$$

өрнегін аламыз. Егер $1 - \lambda \sqrt{2\pi} \tilde{K}(t) \neq 0$ болса, онда (116) теңдеуінің шешімін

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{-\infty}^\infty \frac{f(t) e^{ixt}}{1 - \lambda \sqrt{2\pi} \tilde{K}(t)} dt \quad (117)$$

түрінде анықтаймыз. Егер $1 - \lambda \sqrt{2\pi} \tilde{K}(t) = 0$ болса, онда (116) теңдеуінің жалпы жағдайда абсолютті интегралданатын шешімі жоқ болады.

Енді (117) өрнегінен

$$\varphi(x) - f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \left[\frac{\tilde{f}(t)}{1 - \lambda \sqrt{2\pi} \tilde{K}(t)} - \tilde{f}(t) \right] e^{ixt} dt = \lambda \int_{-\infty}^\infty \frac{\tilde{f}(t) \tilde{K}(t)}{1 - \lambda \sqrt{2\pi} \tilde{K}(t)} e^{ixt} dt \quad (118)$$

теңдігі шығады.

$$\frac{\tilde{K}(t)}{1 - \lambda\sqrt{2\pi}\tilde{K}(t)}$$

функциясын Фурьенің кері түрлендіруі $R(x, \lambda)$ болсын. Сонда (118) өрнегінің оң жағы

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2\pi} \tilde{f}(t) \cdot \frac{\tilde{K}(t)}{1 - \lambda\sqrt{2\pi}\tilde{K}(t)} e^{ixt} dt$$

$f(x)$ пен $R(x, \lambda)$ функцияларының үйірткісі. Сондықтан (118) өрнегін

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} R(x-s, \lambda) f(s) ds \quad (119)$$

түрінде, яғни (116) теңдеуінің шешімі ретінде жазуға болады.

2-мысал. $\varphi(x) = f(x) - \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(s) ds$ теңдеуді шешу керек.

$\tilde{f}(t)$ мен $\tilde{\varphi}(t)$ функциялары сәйкес түрде $f(x)$ пен $\varphi(x)$ функцияларының Фурье түрлендірулері болсын. $K(x) = e^{-|x|}$ деп белгілеп,

$$\tilde{K}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{-itx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{x(1-it)} dx + \int_0^{\infty} e^{-x(1+it)} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{1-it} + \frac{1}{1+it} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{1+t^2}$$

екенін анықтаймыз. Бұл өрнектің екі жағына Фурье түрлендіруін қолдансақ,

$$\tilde{\varphi}(t) = \tilde{f}(t) + \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{1+t^2} \tilde{\varphi}(t),$$

ал бұдан

$$\tilde{\varphi}(t) = \frac{1+t^2}{1-2\lambda+t^2} \tilde{f}(t).$$

Демек,

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1+t^2}{1-2\lambda+t^2} \tilde{f}(t) e^{ixt} dt,$$

мұндағы,

$$\frac{1-2\lambda+t^2}{1+t^2} = 1 - \lambda\sqrt{2\pi}\tilde{K}(t) = 1 - 2\frac{\lambda}{1+t^2}.$$

$\lambda < \frac{1}{2}$ болған жағдайда $1 - \lambda\sqrt{2\pi}\tilde{K}(t) \neq 0, \forall t \in (-\infty, +\infty)$.

Жоғарыдағы өрнекті

$$\tilde{\varphi}(t) - \tilde{f}(t) = \frac{2\lambda}{1 - 2\lambda + t^2} \tilde{f}(t)$$

түрінде жазып, оның үстіне $\lambda < \frac{1}{2}$, болса,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixt}}{1 - 2\lambda + t^2} dt = \frac{\pi}{\sqrt{1 - 2\lambda}} e^{-|x|\sqrt{1 - 2\lambda}}$$

екенін еске алып, одан кейін үйірткі операциясын пайдалансақ, берілген теңдеудің шешімін

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{e^{-|x-t|\sqrt{1-2\lambda}}}{\sqrt{1-2\lambda}} dt$$

түрінде анықтаймыз.

Енді жоғарыдағы (117) және (119) формулалары орынды болуы үшін функцияға қандай қажетті шарттар қою керек екенін көрсететін төмендегі тұжырымды дәлелдеусіз қабылдайық.

1-теорема. $f(x) \in L_2(-\infty, \infty)$, $K(x) \in L_1(-\infty, \infty)$ және $1 - \lambda\sqrt{2\pi}\tilde{K}(t) \neq 0 \quad \forall t$ үшін шарттары орынды болсын. Сонда (117) формуласымен анықталған $\varphi(x) \in L_2(-\infty, \infty)$ және (116) теңдеуінің жалғыз ғана шешімі бар болады. Бірақ $L_2(-\infty, \infty)$ кеңістігінде жатпайтын басқа шешімдері бар болуы мүмкін. Егер (116) теңдеуінің екі шешімі бар болса, олардың айырымы

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} K(x-s)\varphi(s)ds$$

біртекті теңдеуін қанағаттандырады. Бұл теңдеудің шешімін $\varphi(x) = e^{\alpha x}$ түрінде іздейік. Ол кезде теңдеу

$$e^{\alpha x} = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} K(x-s)e^{\alpha s} ds$$

түріне келеді. Бұған $x - s = t$ деп ауыстыру енгізсек,

$$e^{\alpha x} = e^{\alpha x} \int_{-\infty}^{\infty} K(t)e^{-\alpha t} dt,$$

яғни α мына төмендегі теңдеудің шешімі болу керек:

$$\lambda \int_{-\infty}^{\infty} K(t) e^{-\alpha t} dt = 1.$$

Әрине, егер біртекті теңдеудің нөлге тең емес шешімі бар болса, онда біртекті емес теңдеудің ақырсыз көп шешімі бар болады.

3 мысал. 2 мысалдағы біртекті емес теңдеуге сәйкес

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-s|} \varphi(s) ds$$

біртекті теңдеуді шешу мәселесін қарастыралық.

$$e^{-|x-s|} = \begin{cases} e^{-(x-s)}, & x-s > 0 \\ e^{(x-s)}, & x-s < 0 \end{cases}$$

болғандықтан, теңдеуді

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\infty}^x e^{-(x-s)} \varphi(s) ds + \lambda \int_x^{\infty} e^{(x-s)} \varphi(s) ds$$

түрінде жазуға болады. Бұны дифференциалдасак:

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= -\lambda \int_{-\infty}^x e^{-(x-s)} \varphi(s) ds + \lambda \int_x^{\infty} e^{(x-s)} \varphi(s) ds, \\ \varphi''(x) &= \lambda \int_{-\infty}^x e^{-(x-s)} \varphi(s) ds + \lambda \int_x^{\infty} e^{(x-s)} \varphi(s) ds; \end{aligned}$$

бұл өрнектерден $\varphi''(x) - \varphi'(x) + 2\lambda\varphi(x) = 0$ дифференциалдық теңдеуді аламыз. Бұл дифференциалдық теңдеудің шешімі

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= C_1 e^{x\sqrt{1-2\lambda}} + C_2 e^{-x\sqrt{1-2\lambda}}, \quad 1-2\lambda > 0, \\ \varphi(x) &= C_1 + C_2 x, \quad \lambda > \frac{1}{2}; \quad \varphi(x) = C_1 \cos \sqrt{2\lambda-1}x, \quad 1-\lambda < 0. \end{aligned}$$

Сонымен, берілген біртекті интегралдық теңдеудің кез келген параметрінің мәнінде нөлге тең емес шешімі бар болады, яғни λ параметрінің кез келген мәні теңдеудің меншікті саны болады.

Фурье түрлендіруі I-текті интегралдық теңдеуді шешу үшін де қолданылады:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x,s) \varphi(s) ds = f(x). \quad (120)$$

Бұл теңдеудегі функциялар Фурье түрлендіруінің шарттарын қанағаттандырады деп ұйғарып, теңдеудің екі жағына Фурье түрлендіруін қолдансақ, $\sqrt{2\pi} \tilde{K}(t) \tilde{\varphi}(t) = \tilde{f}(t)$ өрнегін аламыз. Бұдан

$$\tilde{\varphi}(t) = \frac{\tilde{f}(t)}{\sqrt{2\pi} \tilde{K}(t)}.$$

Енді бұған Фурьенің кері түрлендіруін қолдансақ,

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{f}(t)}{\tilde{K}(t)} e^{ixt} dt.$$

2-теорема. $f(x) \in L_2(-\infty, \infty)$, ал $K(x) \in L_1(-\infty, \infty)$ болсын. (120) теңдеудің шешімі $\varphi(x) \in L_2(-\infty, \infty)$ бар болуы үшін ол теңдеудегі $f(x)$ пен $K(x)$ функциялары үшін $\tilde{f}(t)/\tilde{K}(t) \in L_2(-\infty, \infty)$ болуы қажетті де жеткілікті.

4-мысал. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2/4x} \varphi(t) dt = e^{-ax}, a > 0$ түріндегі I-текті интегралдық теңдеуді шешу керек.

Шешуі. $K(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} e^{-t^2/4x}$ деп белгілеп,

$$K(p, t) \doteq \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-t^2/4x} \cdot e^{-px} \Big|_{x=z^2} = 2 \int_0^{\infty} e^{-pz^2 - t^2/4z^2} dz = \sqrt{\frac{\pi}{p}} e^{-t\sqrt{p}}.$$

Бұдан кейін $\frac{1}{\sqrt{\pi x}} \int_0^{\infty} e^{-t^2/4x} \varphi(t) dt \doteq \frac{1}{\sqrt{p}} \varphi(\sqrt{p})$, демек, $\varphi(x) = \cos \sqrt{ax}$, себебі

$$\varphi(t) = \frac{q}{t^2} + a.$$

5 мысал. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{-itx} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{1+t^2}$ болғандыктан

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\tilde{\varphi}(\lambda)}{1+t^2} = \tilde{f}(t)$$

өрнегін аламыз. Бұған кері түрлендіруді қолдансақ,

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\pi}{2}} f(t) (1+t^2) e^{ixt} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (1+t^2) e^{ixt} dt.$$

• **Ескерту.** Интегралдық теңдеулерді Фурье түрлендіруін пайдаланып шешу кезінде әртүрлі интегралды есептеуде қиыншылықтар кездеседі. Бұл интегралдарды белгілі арнайы түрлендірулер кестелерін пайдаланып шешкен дұрыс.

§7.2. Лаплас түрлендіруі және оны интегралдық теңдеулерге қолдану

1. Лаплас түрлендіруі. Берілген нақты t аргументті $f(t)$ функциясының Лаплас түрлендіруі деп комплекс p аргументті

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (121)$$

функциясын айтамыз. Әрине теңдіктегі $F(p)$ кез келген $f(t)$ функциясы үшін анықтала бермейді. Сондықтан түрлендіруі орынды болатын функциялар класын келтірейік.

Нақты t аргументті $f(t)$ функциясы: а) $f(t) \equiv 0, t > 0$; ә) t осінің кез келген шенелген интервалында интегралданатын функция; б) $|f(t)| \leq Me^{s_0 t}, t \rightarrow \infty$ шарттарын қанағаттандыратын кез келген комплекс мәнді $f(t)$ функциясын түпнұсқа (түпнұсқа) деп айтады. Мұндағы, M, s_0 оң тұрақты шамалар. Бұл теңсіздіктегі s_0 -дің дәл төменгі мәнін $f(t)$ функциясының өсу көрсеткіші деп айтады. (121) формуласымен өрнектелген комплекс аргументті $F(p)$ функциясын $f(t)$ түпнұсқаның кескіні (бейнесі) деп айтады.

Теорема. $\operatorname{Re} p > s_0$ облысында (121) интегралы жинақты, оның үстіне, егер $\operatorname{Re} p \geq s_1 > s_0$ болса, ол бірқалыпты жинақты және сол жартыжазықтықта аналитикалық функция болады.

Қолданбалы есептерде белгілі кескін $F(p)$ бойынша түпнұсқа функциясын табу керек болады.

1-теорема. Берілген $F(p)$ функциясы $\operatorname{Re} p > s_0$ облысында нақты аргументті бөлікті – тегіс $f(t)$ функциясының кескіні болып және оның өсу көрсеткіші s_0 болсын. Сонда:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p) dp, a > s_0.$$

Бұл өрнекті лапластың Меллиннің кері түрлендіру формуласы деп айтады.

Дәлелдеуі. Көмекші $\varphi(t) = e^{-at} f(t), a > s_0$ функциясын қарастырайық. Фурье интегралы бойынша оны

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{i\lambda(t-\xi)} d\xi$$

түріне келтіреміз. Бұл теңдікте $\varphi(t) = e^{-at} f(t)$ ауыстыруын енгізіп,

$$e^{-at} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\xi} f(\xi) e^{i\lambda(t-\xi)} d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-(a+i\lambda)\xi} d\xi$$

тендігін аламыз; мұнда біз $t < 0$ жағдайында $f(t) = 0$ екенін ескердік. $a + i\lambda = p$ деп белгілеп және (121) мен осы алынған өрнектерді пайдаланып,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) e^{pt} dp$$

екенін көрсетеміз. Теорема дәлелденді.

Енді комплекс p аргументті $F(p)$ функциясы $f(t)$ түпнұсқаның кескіні болуы үшін кейбір жеткілікті шарттарды келтірейік.

2-теорема. Егер $F(p)$ функциясы $\operatorname{Re} p > s_0$ облысында аналитикалық, $p \rightarrow \infty$ жағдайда $\operatorname{Re} p \geq a > s_0$ жартыжазықтығында $\arg p$ бойынша бірқалыпты нөлге ұмтылса және $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) dp$ интегралы абсолютті жинақты болса, онда $F(p)$ функциясы

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) e^{pt} dp$$

функциясының кескіні болады

2. Лаплас түрлендіруінің кейбір қасиеттері. Келешекте ыңғайлы болуы үшін $f(t)$ функциясының кескіні $F(p)$ деген ұғымды $f(t) \doteq F(p)$ деп белгілейміз. Түрлендірудің қасиеттерін қарастырайық.

1⁰ (Сызықтық). Егер $f(t)$ мен $g(t)$ түпнұсқа функциялар болса, онда әрқашан тұрақты α мен β комплекс сандары үшін $\alpha f(t) + \beta g(t) \doteq \alpha F(p) + \beta G(p)$ қатысы орынды мұнда $g(t) \doteq G(p)$.

Бұл өрнектің дұрыстығы ап-айқын.

2⁰ (Ұқсастық). $f(t)$ түпнұсқа болсын. Онда $\forall \alpha$ тұрақтысы үшін $f(\alpha t) \doteq \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$ қатысы орынды.

Расында,

$$\int_0^{\infty} f(\alpha t) e^{-pt} dt \Big|_{\alpha t = \tau} = \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-p\tau/\alpha} \frac{d\tau}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right).$$

3⁰ (Түпнұсқаны дифференциалдау). Егер $f'(t)$ немесе $f''(t)$ функциялары, жалпы жағдайда $f^{(n)}(t)$ функциясы түпнұсқа (түпнұсқа) болса, онда:

$$f'(t) \doteq pF(p) - f(0) \quad (122)$$

немесе

$$f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0). \quad (123)$$

Дәлелдеуі. $\operatorname{Re} p = s > s_0$ болғанда $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)e^{-st} = 0$ екенін ескерсек, бөліктеп интегралдап,

$$f'(t) \doteq \int_0^\infty f'(\tau)e^{-p\tau} d\tau \Big|_0^\infty + p \int_0^\infty f(\tau)e^{-p\tau} d\tau = pF(p) - f(0)$$

(122) өрнегін аламыз.

Дәл осы жолмен (123) өрнегі де дәлелденеді.

4⁰ (*Түпнұсқаны интегралдау*). Егер $f(t)$ түпнұсқа болса, онда $\int_0^t f(\tau)d\tau$ түпнұсқа және

$$\int_0^t f(\tau)d\tau \doteq \frac{F(p)}{p}$$

қатысы орынды.

Дәлелдеуі. $g(t) = \int_0^t f(\tau)d\tau$ функциясының да түпнұсқа екенін оңай байқаймыз, яғни $g(t)$ функциясы а), ә) және б) шарттарын қанағаттандырады. $f'(t) \doteq F(p)$, $g(t) \doteq G(p)$ болсын. $g'(t) = f(t)$ теңдігінен $F(p) = pG(p) - g(0) = pG(p)$. Бұдан $g(t) \doteq G(p) = \frac{F(p)}{p}$ немесе $\int_0^t g(\tau)d\tau = \frac{F(p)}{p}$ қатынасы шығады.

$f(t)$ және $g(t)$ түпнұсқа функциялары үшін ұйысу операциясы әрқашан орынды және

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau.$$

5⁰ (*Көбейту теоремасы*). Егер $f(t) \doteq F(p)$, $g(t) \doteq G(p)$ болса, онда олардың $f * g$ ұйысу да түпнұсқа болады және

$$f * g = F(p) \cdot G(p). \quad (124)$$

Дәлелдеуі. $f(\tau)g(t-\tau)$ көбейтіндісі τ аргументінің $0 \leq \tau \leq t$ облысының сыртқы нүктелерінде нөлге тең. Ал $f(\tau)g(t-\tau)$ функциясынан алынған интегралдың мәні бар және а), ә), б) шарттарын қанағаттандырады. Лаплас түрлендіруін қолданып,

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} \left\{ \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau \right\} dt = \int_0^{\infty} f(\tau) \left\{ \int_{\tau}^{\infty} g(t-\tau) e^{-pt} dt \right\} d\tau \Big|_{t=\tau=t_1} =$$

$$= \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-p\tau} d\tau \int_0^{\infty} g(t_1) e^{-pt_1} dt_1 = G(p)F(p).$$

Кейбір интегралдық теңдеулерді шешу кезінде мына төмендегі күрделі көбейту теоремасы пайдалы.

6⁰ (*Эфрос теоремасы*). $f(t) = F(p)$ болсын және аналитикалық функциялар $G(p)$ мен $q(p)$ мынадай байланыста $G(p)e^{-iq(p)} \div g(t, \tau)$ болсын, сонда

$$F[q(p)]G(p) \div \int_0^{\infty} f(\tau)g(t, \tau)d\tau.$$

Дәлелдеуі. Лаплас түрлендіруін қолданып,

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} \left\{ \int_0^{\infty} f(\tau)g(t, \tau)d\tau \right\} dt = \int_0^{\infty} f(\tau) \left\{ \int_0^{\infty} g(t, \tau)e^{-pt} dt \right\} d\tau =$$

$$= \int_0^{\infty} f(\tau)G(p)e^{-\tau q(p)} d\tau = G(p)F[q(p)].$$

7⁰ Бізге өсу көрсеткіштері s_1 мен s_2 болған $f(t)$, $g(t)$ тұпнұсқалары берілсін. Олардың көбейтіндісі де тұпнұсқа болады, оның үстіне

$$g(t)f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} F(q)G(p-q)dq, \text{ мұндағы } b > s_1, \operatorname{Re} b > s_2 + b.$$

Дәлелдеуі. Әрине, егер $f(t)$ мен $g(t)$ тұпнұсқалары s_1 мен s_2 өсу көрсеткішті тұпнұсқа болса, онда $f(t)g(t)$ көбейтіндісі де көрсеткіші $s = s_1 + s_2$ тұпнұсқа болады. Лаплас түрлендіруін қолданып,

$$\int_0^{\infty} f(t)g(t)e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(q)e^{qt} dq \right\} g(t)e^{-pt} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} F(q) \left\{ \int_0^{\infty} g(t)e^{-(p-q)t} dt \right\} dq = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} F(q)G(p-q)dq.$$

3. Вольтерраның интегралдық теңдеуі. 1) Лапластың түрлендіруін

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x-s)\varphi(s)ds + f(x)$$

интегралдық теңдеуіне қолданайық.

$K(x)$ пен $f(x)$ функциялары ($x > 0$) үзіліссіз функциялар және тұпнұскалар болсын. Егер $|K(x)| \leq M_1 e^{s_1 x}$, $|f(x)| \leq M_2 e^{s_2 x}$ болса, онда теңдеудің шешімі $\varphi(x)$ -ті $|\varphi(x)| \leq M_3 e^{s_3 x}$, $s_3 > \max\{s_1, s_2\}$ түрінде бағалау қиын емес. Демек, $\varphi(x)$ функциясы да тұпнұсқа.

$\varphi(x) \doteq \phi(p)$, $K(x) \doteq K(p)$, $f(x) \doteq F(p)$ болсын. Берілген теңдеудің екі жағына да Лаплас түрлендіруін қолданып, оған (124) өрнегін пайдалансақ, $\phi(p) = \phi(p) = \lambda k(p)\phi(p) + F(p)$ теңдеуін аламыз. Бұдан

$$\phi(p) = \frac{F(p)}{1 - \lambda k(p)}. \quad (125)$$

Бұл өрнектегі $\phi(p)$ функциясы $\operatorname{Re} p = s > s_3$ жарты жазықтығында аналитикалық болуы үшін (125)-тің бөлімінің $\operatorname{Re} p > s_3$ жартыжазықтығында түбірлері болмауы керек.

Лапластың (Меллинше кері түрлендіріп) тұпнұсқа табу формуласын пайдаланып,

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\infty}^{s+i\infty} \frac{F(p)}{1 - \lambda k(p)} e^{px} dp, \quad s > s_3$$

функциясын анықтаймыз. (125) теңдігін

$$\phi(p) - F(p) = \frac{F(p)}{1 - \lambda k(p)} - F(p) = \frac{\lambda k(p)}{1 - \lambda k(p)} F(p)$$

түрінде немесе $\phi(p) = F(p) + \lambda R(p; \lambda) F(p)$ түрінде жазуға болады, мұндағы,

$$R(p; \lambda) = \frac{k(p)}{1 - \lambda k(p)}.$$

Егер $R(p; \lambda) = R(t; \lambda)$ екені белгілі болса, онда берілген теңдеудің шешімін

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x R(x-s; \lambda) f(s) ds$$

түрінде табамыз, мұндағы, $R(x; \lambda)$ теңдеу ядросының резольвентасы.

1-мысал. $\varphi(x) = \cos x + \int_0^x e^{-(x-t)} \varphi(t) dt$ теңдеуін шешу керек.

Шешуі. $e^{-x} = \frac{1}{p+1}$ болғандықтан, теңдеуге Лаплас түрлендіруін қолданып,

$$\phi(p) = \frac{p}{p^2 + 9} + \frac{1}{p + 9} \phi(p)$$

өрнегін аламыз. Бұдан

$$\phi(p) = \frac{p}{p^2 + 9} + \frac{1}{p^2 + 9}.$$

Соңғы өрнектен түпнұсқа тауып, интегралдық теңдеудің шешімін

$$\varphi(x) = \cos 3x + \frac{1}{3} \sin 3x$$

түрінде анықтаймыз.

1-текті

$$\int_0^x K(x-s)\varphi(s)ds = f(x)$$

интегралдық теңдеуін қарастырайық. бұған Лаплас түрлендіруін қолданып, $K(p)\phi(p) = F(p)$ өрнегін аламыз. Бұдан

$$\phi(p) = \frac{F(p)}{K(p)}.$$

Егер $K(0) \neq 0$ болса, онда соңғы өрнекке Лапластың кері түрленуін қолданып, теңдеудің шешімін

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{F(p)}{K(p)} e^{pt} dp$$

түрінде табамыз.

2-мысал. 1-текті $x^4 = \int_0^x (x^2 + 6xt - 7t^2)\varphi(t)dt$ интегралдық теңдеудің шешімін

табайық. Ядро $K(x,t) = 8(x-t)t - (x-t)^2$. Сондықтан теңдеуді $x^4 = \int_0^x (x-t)^2 \varphi(t)dt + 8 \int_0^x (x-t)t\varphi(t)dt$ түрінде жазып, одан кейін $x\varphi(x) \doteq \phi'(p)$ екенін

ескеріп, соңғы теңдеуден

$$\frac{4!}{p^5} = \frac{3}{p^3} \cdot \phi(p) - \frac{8}{p^2} \phi'(p)$$

өрнегін аламыз. Бұдан $\phi(p) = c\sqrt[4]{p} + \frac{4}{3p^2}$ және $\varphi(x) = \frac{4x}{3} + \frac{C}{x^{\frac{5}{4}}}$ түрінде теңдеудің

шешімін аламыз.

2) Лаплас түрлендіруінің Вольтерра интегралдық теңдеулер жүйесіне қолданылуы.

$$\varphi_i(x) = f_i(x) + \lambda \sum_{j=1}^n \int_0^x K_{ij}(x-s)\varphi_j(s)ds, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

теңдеулері жүйесін қарастырайық, мұндағы, $K_{ij}(x)$ және $f_i(x)$ функциялары үзіліссіз түпнұсқа функциялар. Берілген жүйенің екі жағына да Лаплас түрлендіруін қолданып,

$$\phi_i(p) = F_i(p) + \lambda \sum_{j=1}^n K_{ij}(p)\phi_j(p), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

жүйесін аламыз. Бұдан $\phi_1(p), \phi_2(p), \dots, \phi_n(p)$ кескіндерін анықтап, содан кейін оларға Лапластың кері түрлендіруін қолданып, берілген жүйенің шешімін табамыз.
3-мысал.

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = f(x) + \int_0^x \varphi_2(t)dt, \\ \varphi_2(x) = g(x) + \int_0^x \cos(x-t)\varphi_1(t)dt \end{cases}$$

жүйенің шешімін табу керек.

Шешуі. $1 \div \frac{1}{p}, \cos x \div \frac{p}{p^2+1}$ болғандықтан жүйеге Лаплас түрлендіруін қолданып, $\phi_1(p) = F(p) + \frac{1}{p}\phi_2(p), \quad \phi_2(p) = G(p) + \frac{p}{p^2+1}\phi_1(p),$ алгебралық теңдеулері жүйесін аламыз. Бұдан

$$\begin{aligned} \phi_1(p) &= F(p) + \frac{1}{p}F(p) + \frac{p^2+1}{p^3}G(p), \\ \phi_2(p) &= \frac{1}{p}F(p) + G(p) + \frac{1}{p^2}G(p) \end{aligned}$$

екенін анықтаймыз. Бұл өрнектерге ұйысу операциясын қолданып,

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)dt + \int_0^x g(x-t)\left(1 + \frac{t^2}{2}\right)dt, \\ \varphi_2(x) &= g(x) + \int_0^x (x-t)g(t)dt + \int_0^x f(t)dt \end{aligned}$$

түрінде берілген жүйенің шешімін табамыз.

3) Интегро-дифференциалдық теңдеуді шешу. Мына интегро-дифференциалдық

$$\varphi^{(n)}(x) + a_1 \varphi^{(n-1)}(x) + \dots + a_n \varphi(x) + \sum_{j=0}^n \int_0^x K_j(x-s) \varphi^{(j)}(s) ds = f(x) \quad (126)$$

теңдеуінің

$$\varphi(0) = \varphi_0, \varphi'(0) = \varphi_1, \dots, \varphi^{(n-1)}(0) = \varphi_{n-1} \quad (127)$$

шарттарын қанағаттандыратын шешімін табу керек. Мұнда $K_j(x)$, $f(x)$ функциялары түпнұсқа функциялар болсын, сонда теңдеудің шешімі $\varphi(x)$ -те түпнұсқа болады.

$\varphi(x) \div \Phi(p)$, $f(t) \div F(p)$, $K_j(x) \div K_j(p)$ болсын (126) теңдеуіне Лаплас түрлендіруін қолданып,

$$\Phi(p)[p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n + \sum_{j=0}^n K_j(p) p^j] = F(p)$$

өрнегін аламыз, мұндағы, $F(p)$ белгілі функция. Соңғы теңдеуден

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n + \sum_{j=1}^n K_j(p) p^j}.$$

Бұл өрнекке Лапластың кері түрлендіру формуласын қолданып, (126) теңдеуінің (127) шарттарын қанағаттандыратын шешімін табамыз:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{F(p) e^{pt} dt}{p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n + \sum_{j=1}^n K_j(p) p^j}.$$

4-мысал. $\varphi''(x) + \int_0^x \sin(x-t)[\varphi''(t) + \varphi(t)]dt = 2 \cos x$ теңдеуінің $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$ шарттарын қанағаттандыратын шешімін табу керек.

Шешуі. $\sin x \div \frac{1}{p^2 + 1}$, $\cos x \div \frac{p}{p^2 + 1}$ болғандықтан теңдеуге Лаплас түрлендіруін қолдансақ,

$$p^2 \Phi(p) + \frac{1}{p^2 + 1} [p^2 \Phi(p) + \Phi(p)] = \frac{2p}{p^2 + 1}$$

өрнегін аламыз. Бұдан $\Phi(p) = \frac{2p}{(p^2 + 1)^2}$, яғни $\varphi(x) = x \sin x$ берілген теңдеудің берілген шарттарды қанағаттандыратын шешімі болады.

4) Әлсіз ерекшелігі бар ядролы Вольтерраның интегралдық теңдеуін шешу.

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^x \frac{K_0(x-s)}{(x-s)^\alpha} \varphi(s) ds + f(x), \quad 0 < \alpha < 1 \quad (128)$$

теңдеуін қарастырайық. Мұндағы, $K_0(x), f(x)$ функциялары берілген түпнұсқа функциялар болсын: $f(x) \div F(p)$ және $K_0(x) \div K_0(p)$. Енді $\frac{1}{x^\alpha}$ функциясының Лаплас түрлендіруін табайық:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-px}}{x^\alpha} dx = \left| px = t \right| = p^\alpha \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t^\alpha} \frac{dt}{p} = p^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha);$$

демек,

$$\frac{K_0(x)}{x^\alpha} \div \Gamma(1-\alpha) \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} K_0(q)(p-q)^{\alpha-1} dq = H(p),$$

мұнда, $b > 0$. Олай болса, (128) теңдеуіне Лаплас түрлендіруін қолдансақ, $\Phi(p) = \lambda H(p)\Phi(p) + F(p)$, бұдан

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{1 - \lambda H(p)},$$

яғни

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \frac{F(p)}{1 - \lambda H(p)} e^{px} dx$$

берілген теңдеудің шешімі болады.

5-мысал. $\varphi(x) = \lambda \int_0^x \frac{\varphi(s)}{\sqrt{x-s}} ds + f(x)$ теңдеуін қарастырайық.

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \div \int_0^\infty \frac{e^{-pt}}{\sqrt{x}} dx = \left| px = t \right| = \sqrt{p} \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \frac{dt}{p} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{p}} = \sqrt{\frac{\pi}{p}}$$

болғандықтан теңдеу $\Phi(p) = F(p) + \lambda \sqrt{\frac{\pi}{p}} \Phi(p)$ түрінде жазылады, ал бұдан

$$\Phi(p) = F(p) + \frac{\lambda \sqrt{\frac{\pi}{p}}}{1 - \lambda \sqrt{\frac{\pi}{p}}} F(p), \quad \frac{\lambda \sqrt{\frac{\pi}{p}}}{1 - \lambda \sqrt{\frac{\pi}{p}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \left(\frac{\pi}{p}\right)^{n/2}.$$

Бұл өрнекке кері түрлендіру формуласын қолданып, теңдеудің шешімін аламыз:

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x R(x-t)f(t)dt,$$

мұнда, $R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda \sqrt{\pi x})^n}{x \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$

6-мысал. Абельдің интегралдық

$$\int_0^x \frac{\varphi(t)}{\sqrt{x-t}} dt = \sin x$$

теңдеуін шешу керек.

Шешуі. $\frac{1}{\sqrt{x}} \div \sqrt{\frac{\pi}{p}}, \quad \sin x \div \frac{1}{p^2 + 1}$ болғандықтан берілген теңдеуден

$$\sqrt{\frac{\pi}{p}} \Phi(p) = \frac{1}{p^2 + 1}, \quad \text{бұдан} \quad \Phi(p) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{p}{p^2 + 1} \cdot \frac{1}{\sqrt{p}}, \quad \text{демек,} \quad \varphi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{\cos t}{\sqrt{x-t}} dt$$

немесе $\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^x \frac{\cos(x-t)}{\sqrt{t}} dt.$

§7.3. Меллин түрлендіруі және оны қолдану

Қолданбалы есептерде жоғарыдағы Лаплас түрлендіруімен бірге екіжақты Лаплас түрлендіруі

$$F(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-pt} dt \tag{129}$$

қолданады, мұндағы, $f(t)$ функциясы теңдіктің оң жағындағы интеграл анықтала-
тындай болып таңдап алынады.

Мысалы, егер

$$|f(t)| \leq \begin{cases} e^{\alpha t}, & t > 0, \\ e^{-\alpha t}, & t < 0 \end{cases}$$

болса, бұл функциядан алынған $F(p)$ функциясы $|\operatorname{Re} p| > \alpha$ облысында аналитикалық функция болады. (129) формуласы мен анықталған Лапластың екіжақты түрлендіруі де жоғарыдағы Лапластың біржақты түрлендіруін-дегідей Меллиннің кері түрлендіру формуласымен

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p)e^{pt} dp \quad (130)$$

тікелей байланысты.

Егер (129) бен (130) формулаларында p -ны $-p$ -ға t -ны $\tau = e^t$ функциясына ауыстырсақ, онда ол түрлендірулер

$$F(-p) = \int_0^{\infty} f(\ln \tau) e^{p \ln \tau} \frac{d\tau}{\tau}, \quad f(\ln \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(-p) e^{-p \ln \tau} dp$$

түрінде жазылады. Бұлардан $f(\ln \tau) = g(\tau)$ және $F(-p) = G(p)$ деп белгілесек,

$$G(p) = \int_0^{\infty} g(t) t^{p-1} dt, \quad (\sigma + i\eta = p), \quad g(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} G(p) t^{-p} dp, \quad t > 0 \quad (131)$$

Меллин түрлендіруін аламыз.

1. Бұл түрлендіруді де Лаплас түрлендіруіндей төмендегі қасиеттерге ие болады:

$$\begin{aligned} 1^0. & f(\alpha t) \div \frac{G(p)}{\alpha^p}; \\ 2^0. & t^\alpha g(t) \div G(p + \alpha); \\ 3^0. & f(t)g(t) \div \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(q)G(p-q)dq. \end{aligned} \quad (132)$$

Мына төмендегі туындыны түрлендіру туралы теоремаға арнайы тоқталайық.

4⁰. Егер $\lim_{t \rightarrow 0} t^{p-1} g(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{p-1} g(t) = 0$ болса, онда

$$g'(t) \div -(p-1)G(p-1). \quad (133)$$

Дәлелдеуі. Меллин түрлендіруін $g(t)$ функциясының туындысына қолданып,

$$g'(t) \div \int_0^t g'(t) t^{p-1} dt = g(t) t^{p-1} \Big|_0^t - (p-1) \int_0^t g(t) t^{p-2} dt = -(p-1)G(p-1).$$

(133) формуласын қайталап (131) түрлендіруін кез келген жоғарғы ретті туынды үшін анықтауға болады. (132) және (133) өрнектерінен: егер $t^p g(t) \Big|_0^\infty = 0$ болса,

$$tg'(t) \div -pG(p),$$

егер $t^{p+1} g'(t) \Big|_0^\infty = t^p g(t) \Big|_0^\infty = 0$ болса,

$$t^2 g''(t) \div p(p+1)G(p).$$

5⁰. Егер $f(t)$ мен $g(t)$ функцияларының Меллин түрлендірулері сәйкес түрде $F(p)$ мен $G(p)$ болса, онда:

$$\int_0^\infty f(\tau) g\left(\frac{t}{\tau}\right) \frac{d\tau}{\tau} \div F(p)G(p). \quad (134)$$

Дәлелдеуі. Меллин түрлендіруін қолданып,

$$\int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(\tau) g\left(\frac{t}{\tau}\right) \frac{d\tau}{\tau} \right) t^{p-1} dt = \left| \frac{t}{\tau} = t_1 \right| = \int_0^\infty \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau \left(\int_0^\infty g(t_1) t_1^{p-1} dt_1 \right) \tau^{p-1} \tau = F(p)G(p).$$

2. Меллин түрлендіруінің қолданылулары. (134) формуласын

$$\varphi(t) = \lambda \int_0^\infty \varphi(\tau) K\left(\frac{t}{\tau}\right) \frac{d\tau}{\tau} + f(t) \quad (135)$$

интегралдық теңдеуді шешуге қолданады. $\varphi(t), f(t), K(t)$ функциялары үшін Меллин түрлендіруі орынды болсын, яғни $\varphi(t) \div \Phi(p), f(t) \div F(p), K(t) \div K(p)$ анықталған болсын, мұндағы, $F(p)$ мен $K(p)$ ортақ $\sigma_1 < \operatorname{Re} p = \sigma < \sigma_2$ облысында аналитикалық функциялар болсын. (135) теңдеуінің екі жағына Меллин түрлендіруін қолдансақ, $\Phi(p) = F(p) + \lambda K(p)\Phi(p)$, бұдан

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{1 - \lambda K(p)},$$

демек,

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{F(p)}{1 - \lambda K(p)} t^{-p} dp$$

жоғарыдағы (135) теңдеуінің шешімі.

Мысал ретінде Фокстың интегралдық теңдеуін қарастырайық:

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^{\infty} K(x, t) \varphi(t) dt. \quad (136)$$

Бұл теңдеудің екі жағында x^{p-1} функциясына көбейтіп, одан кейін x бойынша 0-ден ∞ -ке кейін интегралдап,

$$\int_0^{\infty} x^{p-1} \varphi(x) dx = \int_0^{\infty} x^{p-1} f(x) dx + \int_0^{\infty} \varphi(t) dt \int_0^{\infty} x^{p-1} K(x, t) dx$$

теңдігін аламыз. Бұған Меллин түрлендіруін қолдансақ,

$$\Phi(p) = F(p) + K(p) \int_0^{\infty} \varphi(t) t^{-p} dt.$$

Мұндағы, $\int_0^{\infty} t^{-p} \varphi(t) dt = \Phi(1-p)$ болғандықтан, алдыңғы өрнекті

$\Phi(p) = F(p) + \Phi(1-p)K(p)$ түрінде аламыз. Бұл теңдік p -ны $1-p$ -ға ауыстырсақ, $\Phi(1-p) = F(1-p) + \Phi(p)K(1-p)$. Соңғы өрнектерден

$$\Phi(p) = \frac{F(p) + F(1-p)K(p)}{1 - K(p)K(1-p)}. \quad (137)$$

Енді (137) теңдігіне Меллиннің кері түрлендіру формуласын қолданып, (136) теңдеуінің шешімін анықтаймыз:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{F(p) + F(1-p)K(p)}{1 - K(p)K(1-p)} x^{-p} dp.$$

Мысал. $\varphi(x) = f(x) + \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} \varphi(t) \cos xt dt$ интегралдық теңдеуін шешу керек.

Шешуі. $\cos x$ функциясының кескінін анықтайық.

$$K(p) = \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} x^{p-1} \cos x dx,$$

ол үшін

$$\int_0^{\infty} e^{-ix} x^{p-1} dx = e^{-\frac{i\pi}{2}p} \Gamma(p)$$

формуласын қолданып, мұндағы нақты және жорамал бөліктерді өзара теңестіріп:

$$\int_0^{\infty} x^{p-1} \cos x dx = \Gamma(p) \cos \frac{\pi p}{2}, \quad \int_0^{\infty} x^{p-1} \sin x dx = \Gamma(p) \cdot \sin \frac{\pi p}{2}$$

екенін анықтаймыз. Сондықтан

$$K(p) = \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} x^{p-1} \cos x dx = \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \Gamma(p) \cos \frac{\pi p}{2}.$$

Бұдан кейін $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$ екенін пайдалансақ,

$$\begin{aligned} K(p)K(1-p) &= \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \Gamma(p) \cos \frac{\pi p}{2} \cdot \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \Gamma(1-p) \sin \frac{\pi p}{2} = \\ &= \frac{2\lambda^2}{\pi} \Gamma(p)\Gamma(1-p) \cos \frac{\pi p}{2} \sin \frac{\pi p}{2} = \lambda^2. \end{aligned}$$

Демек, (137) теңдігінен

$$\Phi(p) = \frac{1}{1-\lambda^2} [F(p) + F(1-p)K(p)], \quad |\lambda| \neq 1$$

екенін анықтаймыз. Бұдан

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{2\pi i(1-\lambda^2)} \cdot \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left[F(p) + F(1-p)\lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \Gamma(p) \cos \frac{\pi p}{2} \right] x^{-p} dp = \\ &= \frac{1}{2\pi i(1-\lambda^2)} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} x^{-p} F(p) dp + \frac{\lambda}{1-\lambda^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} x^{-p} \Gamma(p) \Gamma(1-p) \cos \frac{\pi p}{2} dp. \\ \text{Ал } \frac{1}{2\pi i(1-\lambda^2)} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} x^{-p} F(p) dp &= f(x), \quad \int_0^{\infty} t^{-s} f(t) dt = F(1-s) \text{ болғандықтан} \\ \varphi(x) &= \frac{f(x)}{1-\lambda^2} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\lambda}{2\pi i(1-\lambda^2)} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} (xt)^{-p} F(p) \cos \frac{\pi p}{2} \left(\int_0^{\infty} f(t) dt \right) dp. \end{aligned}$$

Бұл жерде

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} (xt)^{-p} \Gamma(p) \cos \frac{\pi p}{2} dp = \cos xt$$

екенін пайдалансақ, берілген теңдеудің шешімін

$$\varphi(x) = \frac{f(x)}{1-\lambda^2} + \frac{\lambda}{1-\lambda^2} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot f(t) \cos xt$$

түрде анықтаймыз.

8. ИНТЕГРАЛДЫҚ ТЕНДЕУЛЕРГЕ ЕСЕПТЕР

§ 8.1. Интегралдық теңдеулерді топтастыру

Мына

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds + f(x), \quad a \leq x \leq b \quad (138)$$

өрнегі сызықтық интегралдық теңдеу және (138) Фредгольмнің 2-текті интегралдық теңдеуі екені белгілі. Мұндағы $\varphi(x)$ – нақты айнымалы x аргументіне тәуелді белгісіз функция, ал $f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесіндісіндегі, $K(x, s)$ функциясы $D = \{a \leq x, s \leq b\}$ төртбұрышында анықталған белгілі функциялар; $f(x)$ пен $K(x, s)$ - интегралдық теңдеулердің бос мүшесі мен өзегі, ал λ - параметр.

Фредгольмнің 1-текті интегралдық теңдеуінде белгісіз функция интегралдық мүшеде ғана қатынасады, яғни

$$\int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = f(x). \quad (139)$$

Вольтерраның 2-текті интегралдық теңдеуін

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x, s) \varphi(s) ds + f(x), \quad (140)$$

ал

$$\int_a^x K(x, s) \varphi(s) ds = f(x) \quad (141)$$

Вольтерраның 1-текті интегралдық теңдеуі деп белгілейік.

Мына интегралдық теңдеулердің біртекті-біртекті емес, сызықтық-сызықты емес жағдайларын және қандай топқа жататынын анықтаңыз.

$$0.1. \quad \varphi(x) = \lambda \int_0^1 (x^2 + xs) \varphi(s) ds + \cos x.$$

$$0.2. \quad \varphi(x) = \lambda \int_0^1 (x^2 + s \varphi(x)) \varphi(s) ds + \sin 2x.$$

$$0.3. \quad \varphi(x) = \lambda \int_0^1 \left(\ln \frac{x}{s} + \ln \frac{s}{x} \right) \varphi(s) ds + x^2.$$

$$0.4. \quad \varphi(x) = \lambda \int_2^3 (x - s) \sqrt{\varphi(s)} ds.$$

$$0.5. \quad \varphi(x) = \lambda \int_0^1 [2S\varphi(x) + x\varphi(s)]ds - 2x.$$

$$0.6. \quad \varphi(x) = \lambda \int_0^{\pi} [\varphi(x) \cos s + s\varphi(s)]ds + xe^{-x}.$$

$$0.7. \quad \varphi(x) = \lambda \int_2^3 \left[\left(\ln s + 2 \ln \frac{1}{\sqrt{s}} \right) \varphi^2(s) + sx\varphi(s) \right] ds.$$

$$0.8. \quad \varphi(x) = \lambda \int_0^1 x(\varphi(s) - s)ds + \frac{x}{2}.$$

$$0.9. \quad \varphi(x) = \lambda \int_1^2 \left[x(\sqrt{s\varphi(s)} - 1)^2 + 2x\sqrt{s\varphi(s)} \right] ds - x.$$

$$0.10. \quad \int_0^1 (x^2 s - 1)\varphi(s)ds = e^{-2x}.$$

$$0.11. \quad \int_1^2 (xs^2\varphi(s) - x^2 s)ds = \frac{3}{2}e^2.$$

$$0.12. \quad \varphi(x) = 2 \int_0^{\pi} \cos(x-s)\varphi(s)ds + x.$$

$$0.13. \quad \varphi(x) = -3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x-s)\varphi(s)ds.$$

$$0.14. \quad \int_0^x \frac{1+s^2}{x^2+1} \varphi(s)ds = 2x^{\frac{2}{3}}.$$

$$0.15. \quad \int_0^x [xs\varphi(s) - 2\varphi(s)]ds.$$

Бұдан былай жоғарғыдағы интегралдық теңдеулердегі берілген бос мүше $f(x)$ пен $K(x,s)$ -ті өзекті үзіліссіз немесе квадраттарымен интегралданатын функциялар деп

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < +\infty, \quad (142)$$

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,s)|^2 dx ds < +\infty, \quad (143)$$

яғни $f(x), K(x,s) \in L_2[a,b]$ деп ұйғарамыз. (143) шартын қанағаттандыратын $K(x,s)$ функциясын Фредгольм өзегі деп атайды.

Енді Фредгольм өзектеріне мысалдар келтірейік.

1-мысал. $K(x,s) = xs, a \leq x, s \leq b$, мұндағы, a, b -ақырлы сандар.

$$\int_a^b \int_a^b x^2 s^2 dx ds = \int_a^b x^2 dx \int_a^b s^2 ds = \frac{1}{9} (b^3 - a^3)^2.$$

Егерде a, b сандарының ең болмағанда біреуі шексіз болса, онда жоғарғы тұжырым дұрыс болмайды.

2-мысал. $K(x, s) = \frac{\sqrt{xs}}{x^2 + s^2}$, $a = 0$, $b = 1$ болсын.

Ендеше,

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{xs}{(x^2 + s^2)^2} dx ds = \frac{1}{2} \int_0^1 x dx \int_0^1 \frac{d(x^2 + s^2)}{(x^2 + s^2)} = \frac{1}{4} \left[\int_0^1 \frac{dx^2}{x^2} - \int_0^1 \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} \right],$$

демек, бұл өзек Фредгольм өзегі болмайды, ал егер $a = -1$, $b = 1$ болса, онда ол Фредгольм өзегі болады, себебі

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{xs}{(x^2 + s^2)^2} dx ds = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 x dx \int_{-1}^1 \frac{d(x^2 + s^2)}{(x^2 + s^2)^2} = 0,$$

яғни бұл жағдайда $\frac{\sqrt{xs}}{x^2 + s^2}$ - Фредгольм өзегі.

Төмендегі берілген функциялардың Фредгольм өзегі болатын немесе болмайтынын анықтаңыз.

1.1. e^{-xs} , $a = 1, b = \infty$.

1.2. e^{-xs} , $a = 0, b = \infty$.

1.3. $\frac{1}{\sqrt{x+s}}$, $a = 1, b = 2$.

1.4. $\frac{1}{\sqrt{x-s}}$, $a = 1, b = 2$.

1.5. $\frac{e^{-s}}{\sqrt{x+1}}$, $a = 0, b = \infty$.

1.6. $\frac{e^{-s}}{\sqrt{x+1}}$, $a = 0, b = c < +\infty$.

1.7. $\frac{e^{-xs}}{\sqrt{x}}$, $a = 1, b = \infty$.

1.8. $\frac{e^{-xs}}{\sqrt{x}}$, $a = 0, b = \infty$.

1.9. $x + \cos s$, $0 < x, s \leq \frac{\pi}{2}$.

$$1.10. \quad x + tgs, \quad 0 < x, s \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$1.11. \quad \sin xs, \quad 0 < x, s \leq \frac{\pi}{2}.$$

Берілген функцияның интегралдық теңдеуді қанағаттандыратынын көрсету.

1-мысал. $\varphi(x) = \sin x$ функциясы

$$\varphi(x) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x-s) \varphi(s) ds - \frac{2}{\pi} \cos x$$

Фердгольмнің 2-текті интегралдық теңдеуінің шешімі болатынын анықтау керек.

Шешуі. Теңдеуге $\varphi(x) = \sin x$ функциясын қоямыз

$$\varphi(x) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x-s) \sin s ds - \frac{2}{\pi} \cos x \Leftrightarrow \sin x = -\frac{2}{\pi} \cos x +$$

$$+ \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos x \cos s + \sin x \sin s] \sin s ds \Leftrightarrow$$

$$\sin x = -\frac{2}{\pi} \cos x + \frac{4}{\pi} \left[\frac{1}{2} \cos x + \frac{\pi}{4} \sin x \right] \Leftrightarrow \sin x = \sin x.$$

2-мысал. $\int_0^x (x+s) \varphi(s) ds = \frac{16}{15} x^{\frac{5}{2}}$ теңдеуінің шешімі $\varphi(x) = \sqrt{x}$ екенін көрсетейік.

Расында да, белгісіз функцияның орнына $\sqrt{x}$ шешімін қойсақ

$$\frac{16}{15} x^{\frac{5}{2}} = \int_0^x (x+s) \sqrt{s} ds \Leftrightarrow \frac{16}{15} x^{\frac{5}{2}} = \left(x \cdot \frac{2}{3} s^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5} s^{\frac{5}{2}} \right) \Big|_0^x = \frac{16}{15} x^{\frac{5}{2}}.$$

3-мысал. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x+s) \varphi(s) ds = \frac{1}{2} \cos x - \frac{\pi}{4} \sin x$ теңдеуінің шешімі $\varphi(x) = \sin x$ функциясы болады. Тексеріп көрейік:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x+s) \sin s ds &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x \cos s - \sin x \sin s) \sin s ds = \\ &= \frac{\cos x}{2} \left(-\frac{\cos 2s}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin x \left[\frac{s}{2} - \frac{\sin 2s}{4} \right] \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \cos x - \frac{\pi}{4} \sin x. \end{aligned}$$

Берілген функциялар мына интегралдық теңдеулердің шешімі болатынын анықтаңыз:

1. $\varphi(x) = 6 \int_0^x \frac{3x-s}{s+1} \varphi(s) ds + (7x-16)x^2 + 1, \quad \varphi(x) = 1 - x^2.$
2. $\varphi(x) = \int_0^x \operatorname{ctgs} \varphi(s) ds, \quad \varphi(x) = \sin x.$
3. $\varphi(x) = 3 \int_0^1 (1-sx) \varphi(s) ds + x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}, \quad \varphi(x) = x^2 + \frac{1}{2}.$
4. $\varphi(x) = \int_0^x \frac{x-s}{\sqrt{s}} \varphi(s) ds = x^3, \quad \varphi(x) = 6x^{\frac{3}{2}}.$
5. $\varphi(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-s}} \varphi(s) ds = \pi, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$
6. $\varphi(x) = \int_0^x x \sin x \varphi(s) ds = \frac{x}{2}, \quad \varphi(x) = \cos x.$
7. $\varphi(x) = \frac{3}{2} \int_0^1 (xs + \sqrt{x}) \varphi(s) ds - \frac{3}{5}x, \quad \varphi(x) = \sqrt{x}.$
8. $\varphi(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x |\pi - s| \varphi(s) ds + x, \quad \varphi(x) = x + \pi^3 \sin x.$
9. $\varphi(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos s \varphi(s) ds + 1 - \frac{1}{2} \sin x, \quad \varphi(x) = 1 + \sin x.$
10. $\varphi(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{3x+5s}{\sqrt{1+x}} \varphi(s) ds + \sqrt{x} - \sqrt{x+1}, \quad \varphi(x) = \sqrt{x}.$
11. $\varphi(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (3xs - 4s^2) \varphi(s) ds, \quad \varphi(x) = \frac{x}{2}.$
12. $\varphi(x) = \int_0^x e^{x-s} \varphi(s) ds + e^x, \quad \varphi(x) = e^{2x}.$
13. $\varphi(x) = \int_0^x xs \varphi(s) ds + x, \quad \varphi(x) = xe^{\frac{1}{3}}.$
14. $\varphi(x) = \int_0^x e^{-(x-s)} \sin(x-s) \varphi(s) ds + e^{-x}, \quad \varphi(x) = e^{-x} \left(\frac{x^2}{2} + 1 \right).$
15. $\varphi(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-s}} \varphi(s) ds = \sqrt{x}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{2}.$

§ 8.2. Интегралдық және дифференциалдық теңдеулер арасындағы байланыс

1. Тұрақты коэффициентті дифференциалдық теңдеулер үшін Кошидің кейбір есептерін Вольтерраның екінші текті интегралдық теңдеуіне келтіру:

1 мысал.

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x) \quad (144)$$

теңдеуінің

$$y(0)=a_0, \quad y'(0)=a_1 \quad (145)$$

бастапқы шарттарын қанағаттандыратын шешімін табу керек.

Ол үшін $y''(x) = \varphi(x)$ белгілеуін енгізіп, бұдан

$$y'(x) = a_1 + \int_0^x \varphi(s) ds$$

және

$$y(x) = a_0 + a_1 x + \int_0^x (x-s)\varphi(s) ds$$

теңдіктерін аламыз. Енді осы өрнектерді (144) теңдеуіне қоямыз:

$$\varphi(x) + \int_0^x p(x)\varphi(s) ds + a_1 p(x) + a_0 q(x) + a_1 x q(x) + q(x) \int_0^x (x-s)\varphi(s) ds = f(x),$$

яғни өзегі

$$K(x, s) = p(x) + (x-s)q(x),$$

ал бос мүшесі

$$F(x) = f(x) - a_1 p(x) - (a_0 + a_1 x)q(x)$$

болатын Вольтерраның 2 текті теңдеуін аламыз:

$$\varphi(x) = \int_0^x K(x, s)\varphi(s) ds = F(x).$$

2 мысал. $y''' + x^2 y'' + 4xy = xe^{-x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 0$ Коши есебіне сәйкес келетін интегралдық теңдеуін табайық.

Ол үшін $y'''(x) = \varphi(x)$ белгілеуін енгізіп

$$y''(x) = \int_0^x \varphi(s) ds, \quad y'(x) + 1 = \int_0^x (x-s)\varphi(s) ds, \quad y(x) - 1 + x = \int_0^x \frac{(x-s)^2}{2} \varphi(s) ds$$

теңдіктерін аламыз. Енді бұл өрнектердегі $y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$ функцияларын интегралдармен алмастырсақ,

$$\varphi(x) + \int_0^x [x^2 2x(x-s)] \varphi(s) ds = xe^{-x} + 4x(1-x)$$

2-текті Вольтерра теңдеуін аламыз.

Төменде берілген Коши есептеріне сәйкес келетін интегралдық теңдеулерді табыңыз.

$$2.1. y' + 2xy = e^x, y(0) = 1.$$

$$2.2. y'' - 2y' + y = 0, y(2) = 1, y'(2) = -2.$$

$$2.3. y'' - \sin xy' + e^x y = x, y(0) = 1, y'(0) = -1.$$

$$2.4. y''' + xy = e^x, y(0) = 1, y'(0) = y''(0) = 0.$$

$$2.5. y^{IV} + y'' - y = 0, y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, y'''(0) = 1.$$

$$2.6. y' + xy = x + 1, y(0) = 1.$$

$$2.7. y'' - x^2 y = 4x - x^2, y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

$$2.8. y''' - 2x^2 y' + 4y = 2x^2 + 8, y(0) = 2, y''(0) = 0, y'(0) = -1.$$

2. Дифференциалдық теңдеу үшін берілген кейбір шекаралық есептерді Грин функциясы арқылы интегралдық теңдеуге келтіруге болады.

Бұл мәселені жалпы жағдайда келтірейік.

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x) \quad (146)$$

теңдеуін

$$y(a) = A, y(b) = B \quad (147)$$

шекаралық шарттарымен бірге қарастырайық.

Кәдімгі дифференциалдық теңдеулер курсына (146)-(147) есебінің шешімі Грин функциясы арқылы

$$y(x) = \int_a^b G(x,s)f(s)ds \quad (148)$$

түрінде жазылады.

Егер (146) өрнектегі $f(x)$ функциясы $f(x, \varphi(x))$ түрде белгісіз функцияға да тәуелді күрделі функция болса, онда (148) формуладан

$$y(x) = \int_a^b G(x,s)f(s, y(s))ds$$

интегралдық теңдеуін аламыз.

1-мысал.

$$y'' = \lambda y + x^2, \quad y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

шеттік есебі берілсін. Бұл есепті интегралдық теңдеуге келтірейік.

Шешуі. Алдымен

$$y'' = 0, \quad y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

біртекті есеп үшін Грин функциясын анықтайық. $y''(0) = 0$ теңдеуінің шекаралық шарттарын қанағаттандыратын $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x - \frac{\pi}{2}$ сызықтық тәуелсіз шешімдері болатындықтан Грин функциясы

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{y_1(x)y_2(\xi)}{\Delta(\xi)}, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \frac{1}{\Delta(\xi)} \cdot y_1(\xi)y_2(x), & \xi \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

түрінде жазылады, мұндағы,

$$\Delta(\xi) = \begin{vmatrix} \xi & \xi - \frac{\pi}{2} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\pi}{2}.$$

Демек,

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \left(\frac{2}{\pi}\xi - 1\right)x, & 0 \leq x \leq \xi, \\ \left(\frac{2}{\pi}x - 1\right)\xi, & \xi \leq x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Енді осы Грин функциясын интегралдық теңдеудің өзегі деп қабылдасақ, онда бұл есеп үшін интегралдық теңдеу

$$y(x) = f(x) - \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} G(x, \xi)y(\xi)d\xi,$$

мұндағы,

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} G(x, \xi)\xi^2 d\xi = \int_0^x \left(\frac{2x}{\pi} - 1\right)\xi^3 d\xi + \int_x^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2\xi}{\pi} - 1\right)x\xi^2 d\xi = \frac{x}{12}\left(x^2 - \frac{\pi^5}{8}\right).$$

Мысал. Шеттік есеп

$$y'' - k^2 y = f(x, y), \quad y(0) = y(1) = 0, \quad k = \text{const}$$

берілсін. Бұл есепті Грин функциясы арқылы интегралдық теңдеуге келтірейік. Біртекті $y'' - k^2 y = 0$ теңдеуінің екі сызықтық тәуелсіз шешімдері $y_1 = e^{kx}$, $y_2 = e^{-kx}$, ал шекаралық шарттарды қанағаттандыратын сызықтық тәуелсіз шешімдері

$$y_1(x) = e^{kx} - e^{-kx}, \quad y_2(x) = e^{k(x-1)} - e^{-k(x-1)}.$$

Сондықтан:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} C_1(\xi)(e^{kx} - e^{-kx}), & 0 \leq x \leq \xi, \\ C_2(\xi)(e^{k(x-1)} - e^{-k(x-1)}), & \xi \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

$G(x, \xi)$ үзіліссіз функция, демек,

$$C_1(\xi)(e^{k\xi} - e^{-k\xi}) = C_2(\xi)(e^{k(\xi-1)} - e^{-k(\xi-1)})$$

туындысы $G'_x(\xi, x)$ функциясының $x = \xi$ нүктесінде үзілісті ($\frac{1}{p(\xi)}$ - секірмелі),

яғни

$$-C_1(ke^{k\xi} + ke^{-k\xi}) + C_2k(e^{k(\xi-1)} + e^{-k(\xi-1)}) = 1,$$

олай болса,

$$\left. \begin{aligned} C_2(e^{k(\xi-1)} - e^{-k(\xi-1)}) - C_1(e^{k\xi} - e^{-k\xi}) &= 0, \\ C_2(e^{k(\xi-1)} + e^{-k(\xi-1)}) - C_1(e^{k\xi} + e^{-k\xi}) &= \frac{1}{k}, \end{aligned} \right\}$$

$$\Delta = 2(e^k - e^{-k}),$$

$$C_1(\xi) = \frac{1}{k\Delta}(e^{k(\xi-1)} - e^{-k(\xi-1)}), \quad C_2(\xi) = \frac{1}{k\Delta}(e^{k\xi} - e^{-k\xi})$$

Демек, Грин функциясы

$$G(x, \xi) = \frac{1}{2k(e^k - e^{-k})} \begin{cases} (e^{kx} - e^{-kx})(e^{k(\xi-1)} - e^{-k(\xi-1)}), & 0 \leq x \leq \xi \\ (e^{k\xi} - e^{-k\xi})(e^{k(x-1)} - e^{-k(x-1)}), & \xi \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Олай болса, берілген есепті

$$y(x) = \int_0^1 G(x, \xi) f(\xi, y(\xi)) d\xi$$

интегралдық теңдеуге келтірдік.

Мына шеттік есептерді интегралдық теңдеулерге келтіріңіз:

$$2.2.1. \quad y'' = \lambda y + e^x, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

$$2.2.2. \quad y^{IV} = \lambda y + 1, \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(1) = y'''(1) = 0.$$

$$2.2.37 \quad y'' = \lambda y + e^x, \quad y(0) = y'(0) = 0, \quad y(1) = y'(1).$$

3. Көп жағдайда Вольтерраның 2-текті интегралдық теңдеулерін жай дифференциалдық теңдеу үшін Коши есебіне келтіруге болады.

Мысал.

$$\varphi(x) = \sin x + \int_0^x \sin(x-s)\varphi(s)ds \quad (149)$$

теңдеуін шешу керек.

Бұл теңдеуді біртіндеп дифференциалдайық:

$$\varphi'(x) = \cos x + \int_0^x \cos(x-s)\varphi(s)ds, \quad (150)$$

$$\varphi''(x) = -\sin x + \varphi(x) - \int_0^x \sin(x-s)\varphi(s)ds. \quad (151)$$

(149) пен (151) теңдеулерінен $\int_0^x \sin(x-s)\varphi(s)ds$ интегралын жойсақ, $\varphi(x)$ функциясы үшін $\varphi''(x) = 0$ теңдеуін аламыз. Ал (149), (150) теңдеулерінен $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$ бастапқы шарттарды анықтаймыз, яғни

$$\varphi''(0) = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 1.$$

Біз Коши есебіне келдік. Ал бұл есептің шешімі $\varphi(x) = x$.

Мына төменде берілген Вольтерраның интегралдық теңдеулерін кәдімгі дифференциалдық теңдеулерге келтіріп шешіңіз:

$$2.9. \quad \varphi(x) = \int_0^x \frac{s+1}{(x+1)^2} \varphi(s)ds + x.$$

$$2.10. \quad \int_0^x e^{x-s} s \varphi(s)ds = x.$$

$$2.11. \quad \varphi(x) = \int_0^x \sin(x-s)\varphi(s)ds + x^2.$$

$$2.12. \quad \int_0^x \cos(x-s)\varphi(s)ds = 2 \sin x + x.$$

$$2.13. \quad \varphi(x) = e^x + \int_0^x \varphi(s)ds.$$

$$2.14. \quad \varphi(x) = 1 + \int_0^x s \varphi(s)ds.$$

$$2.15. \quad \varphi(x) = \frac{1}{1+x^2} + \int_0^x \sin(x-s)\varphi(s)ds.$$

$$2.16. \quad \varphi(x) = e^{-x} \cos x - \int_0^x \cos x e^{-(x-s)} \varphi(s)ds.$$

$$2.17. \quad \varphi(x) = 4e^x + 3x - 4 - \int_0^x (x-s)\varphi(s)ds.$$

$$2.18. \quad \varphi(x) = x - 1 + \int_0^x (x-s)\varphi(s)ds.$$

$$2.19. \quad \varphi(x) = \sin x + \frac{1}{2} \int_0^x (x-s)^2 \varphi(s)ds.$$

$$2.20. \quad \varphi(x) = \cosh x - \int_0^x \sinh(x-s)\varphi(s)ds.$$

$$2.21. \varphi(x) = x + \int_0^x (4 \sin(x-s) - x + s) \varphi(s) ds.$$

$$2.22. \varphi(x) = 1 + \int_0^x [(x-s)^2 - (x-s)] \varphi(s) ds.$$

§ 8.3. Вольтерраның 2-текті интегралдық теңдеулерін тізбектей жуықтап шешу әдісі

Вольтерраның 2-текті интегралдық теңдеуін қарастырайық:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,s) \varphi(s) ds. \quad (152)$$

Мұнда оның $K(x,s)$ өзегі мен $f(x)$ берілген және олар $D = \{a \leq x \leq b, a \leq s \leq x\}$ төртбұрышында үзіліссіз, ал λ -параметр. $[a,b]$ кесіндісінде кез келген $\varphi_0(x)$ функциясын алып, оны (152) теңдеуінің нөлінші жуық шешімі делік. Бұл функцияны (152) теңдеуінің оң жағындағы $\varphi(x)$ функциясының орнына қойып,

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,s) \varphi_0(s) ds$$

интегралдық теңдеуінің бірінші жуық шешімін аламыз. Осы үдерісті әрі қарай жалғастыру нәтижесінде

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots \quad (153)$$

жуық шешімдер тізбегін аламыз, мәселен мұндағы, n – жуық шешім үшін

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,s) \varphi_{n-1}(s) ds. \quad (154)$$

Егер $f(x) \in C[a,b]$, $K(x,s) \in C(D)$ болса, онда $\{\varphi_n(x)\}$ жуық шешімдер тізбегі $n \rightarrow \infty$ жағдайда (152) теңдеуінің шешімі $\varphi(x)$ функцияға жинақты екені интегралдық теңдеулердің жалпы теориясынан белгілі [3,4].

$\varphi_0(x)$ функциясын ыңғайлы етіп алу $\{\varphi_n(x)\}$ тізбектің интегралдық теңдеу шешіміне жинақтылығын шапшаңдатады.

Мысалы,

$$\varphi(x) = x^2 + 2 - \int_a^x (x-s) \varphi(s) ds.$$

Теңдеуінде $\varphi_0(x) = 1$ деп алып, тізбектей жуықтап әдісін қолдансақ,

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= x^2 + 2 - \int_a^x (x-s) \cdot 1 \cdot ds = 2 - \frac{x^2}{2!}, \\ \varphi_2(x) &= x^2 + 2 - \int_a^x (x-s) \left(2 - \frac{s^2}{2!} \right) ds = 2 - \frac{x^4}{4!}, \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi_n(x) &= 2 - \frac{x^{2n}}{2n!}, \dots\dots\end{aligned}$$

Жауабы. $\varphi(x) = 2$, себебі $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{x^{2n}}{2n!} \right) = 2$.

Мына төмендегі интегралдық теңдеулерді тізбектей жуықтап шешу әдісімен шешіңіз:

- 3.1. $\varphi(x) = 1 + \int_0^x \varphi(s) ds, \varphi_0(x) = 0$.
- 3.2. $\varphi(x) = \frac{x^2}{2} + x - \int_0^x \varphi(s) ds, a) \varphi_0(x) = 1; b) \varphi_0(x) = \frac{x^2}{2} + x$.
- 3.3. $\varphi(x) = 1 - x^2 + \int_0^x x \varphi(s) ds, a) \varphi_0(x) = 1 - x^2; b) \varphi_0(x) = 1$.
- 3.4. $\varphi(x) = 1 + \int_0^x x \varphi(s) ds, \varphi_0(x) = 1$.
- 3.5. $\varphi(x) = 1 + \int_0^x s \varphi(s) ds, \varphi_0(x) = 1$.
- 3.6. $\varphi(x) = 1 + \int_0^x s'' \varphi(s) ds, \varphi_0(x) = 1, p = 0, 1, 2, \dots$
- 3.7. $\varphi(x) = x - \int_0^x (x-s) \varphi(s) ds, \varphi_0(x) = 0$.
- 3.8. $\varphi(x) = 1 + \int_0^x (x-s) \varphi(s) ds, \varphi_0(x) = 0$.
- 3.9. $\varphi(x) = 2^x + \int_0^x 2^{x-s} \varphi(s) ds, \varphi_0(x) = 0$.
- 3.10. $\varphi(x) = 1 + x^2 - \frac{1}{2} \int_0^x \frac{1+x^2}{1+s^2} \varphi(s) ds, \varphi_0(x) = 1$.

§ 8.4. Интегралдық теңдеудің резольвентасы

Көп жағдайда мынадай интегралдық теңдеу:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, s) \varphi(s) ds. \quad (155)$$

λ сан параметрінің әртүрлі мәндері үшін теңдеулер жиынтығын түзеді. Айталық, (155) теңдеудегі λ параметрін тұрақты және нөлінші жуық шешімі $\varphi_0(x) = f(x)$ деп алып, теңдеуді тізбектей жуықтап шешу әдісімен шешейік. Онда:

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,s)f(s)ds = f(x) + \lambda \int_a^x K_1(x,s)f(s)ds,$$

мұнда $K_1(x,s) = K(x,s)$,

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) &= f(x) + \lambda \int_a^x K(x,s)f(s)ds + \lambda^2 \int_a^x K(x,t) \left(\int_a^t K_1(t,s)f(s)ds \right) dt = \\ &= f(x) + \lambda \int_a^x K_1(x,s)f(s)ds + \lambda^2 \int_a^x \left(\int_a^t K(x,t)K_1(t,s)f(s)ds \right) dt = f(x) + \\ &+ \lambda \int_a^x K_1(x,s)f(s)ds + \lambda^2 \int_a^x K_2(x,s)f(s)ds. \end{aligned}$$

$$K_2(x,s) = \int_s^x K(x,t)K_1(t,s)dt, \dots$$

Жалпы жағдайда:

$$\varphi_n(x) = f(x) + \sum_{j=1}^n \lambda^j \int_a^x K_j(x,s)f(s)ds, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (156)$$

мұндағы,

$$K_j(x,s) = \int_s^x K(x,t)K_{j-1}(t,s)dt, \quad j = 1, 2, \dots \quad (157)$$

Егер $K(x,s)$ өзегі үзіліссіз функция болса, онда

$$R(x,s;\lambda) = \sum_{j=1}^n \lambda^{j-1} K_j(x,s) \quad (158)$$

қатары λ параметрінің кез келген тұрақты мәні үшін $R(x,s;\lambda)$ функциясына жинақталады ($x \in [a,b]$ және $x \in [a,x]$ -қа салыстырғанда бірқалыпты). Сонымен (157) қатары $n \rightarrow \infty$ жағдайда

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x R(x,s;\lambda)f(s)ds \quad (159)$$

өрнегіне айналады, ал бұл жоғарыдағы (155) интегралдық теңдеуінің шешімі болады.

Мысалы. $K(x,s) = x$ өзегінің $R(x,s,\lambda)$ резольвентасын түзіп, мына

$$\varphi(x) = x - \frac{1}{2} \int_a^x x\varphi(s)ds$$

интегралдық теңдеуін шешейік.

Жоғарыдағы (157) рекурент өрнегінен:

$$K_1(x, s) = x,$$

$$K_2(x, s) = \int_s^x K(x, t) K_1(t, s) ds = \int_s^x x t dt = x \cdot \frac{x^2 - s^2}{2},$$

$$K_3(x, s) = \int_s^x x t \cdot \frac{t^2 - s^2}{2} dt = x \cdot \frac{1}{2!} \left(\frac{x^2 - s^2}{2} \right)^2,$$

$$K_j(x, s) = \frac{1}{(j-1)!} \left(\frac{x^2 - s^2}{2} \right)^{j-1}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Бұл өзектерді (158) қатарына қойсақ,

$$R(x, s; \lambda) = x \sum_{j=1}^n \frac{1}{(j-1)!} \left(\frac{x^2 - s^2}{2} \right)^{j-1} = x e^{\lambda \frac{x^2 - s^2}{2}}.$$

Демек, берілген интегралдық теңдеудің шешімін (159) формула бойынша тапсақ, онда

$$\varphi(x) = x - \frac{1}{2} \int_0^x x e^{-\frac{1}{4}(x^2 - s^2)} ds.$$

Жауабы. $\varphi(x) = x e^{-\frac{x^2}{4}}.$

1. Мына берілген өзектердің резольвенталарын табыңыз:

4.1. $K(x, s) = 1.$

4.2. $K(x, s) = s.$

4.3. $K(x, s) = x^2.$

4.4. $K(x, s) = xs.$

4.5. $K(x, s) = xs^2.$

4.6. $K(x, s) = e^{x-s}.$

4.7. $K(x, s) = 2^{shx - chs}.$

4.8. $K(x, s) = \frac{1 + x^2}{1 + s^2}.$

4.9. $K(x, s) = \frac{s^2 - s + 1}{x^2 - x + 1}.$

4.10. $K(x, s) = \frac{chx}{chs}.$

2. Мына интегралдық теңдеулерді резольвенталары арқылы шешіңіз:

4.11. $\varphi(x) = 1 - \int_0^x s \varphi(s) ds.$

4.12. $\varphi(x) = x + \int_0^x xs \varphi(s) ds.$

$$4.13. \varphi(x) = \sin x + 2 \int_0^x e^{x-s} \varphi(s) ds.$$

$$4.14. \varphi(x) = chx + \int_0^x \frac{chx}{chs} \varphi(s) ds.$$

$$4.15. \varphi(x) = \frac{1}{1+x^2} + \int_0^x \frac{1+s^2}{1+x^2} \varphi(s) ds.$$

§ 8.5. Үйірткі типіндегі Вольтерраның 2-текті интегралдық теңдеуі және оны Лапластың интегралдық түрлендіру әдісімен шешу

Мына

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x K(x,s) \varphi(s) ds \quad (160)$$

Вольтерраның 2-текті интегралдық теңдеуінің өзегі $K(x,s) = K(x-s)$ түрінде, яғни аргументтерінің айырымымен берілген болса, онда мұндай теңдеуді көбейту типіндегі теңдеу деп атайды.

Егер (160) теңдеудегі a саны шектелген болса, оны ыңғайлы болу үшін $a = 0$ деп алуға болады. Бұл (160) теңдеуді шешу үшін Лапластың интегралдық түрлендіруін пайдаланамыз.

Айталық, $f(x)$ пен $K(u)$ функциялары интегралдық түрлендірудің түпнұсқасы болсын. Бұл жағдайда (160) теңдеудегі $\varphi(x)$ функциясы да түпнұсқа болады. Ендеше (160) интегралдық теңдеуінің екі жағына да Лаплас түрлендіруін қолдансақ,

$$Y(p) = F(p) + \tilde{K}(p)Y(p)$$

өрнегін аламыз. Бұдан

$$Y(p) = \frac{F(p)}{1 - \tilde{K}(p)}. \quad (161)$$

Соңғы (161) өрнегінен Лапластың кері түрлендіру әдісін пайдаланып, (160) теңдеуінің шешімін табамыз.

Мысал. Мына

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^x ch(x-s) \varphi(s) ds$$

Вольтерраның 2-текті интегралдық теңдеуін Лапластың интегралдық түрлендіру әдісімен шешелік:

$1 = p$, $\text{ch } z = \frac{p}{p-1}$ болғандықтан, берілген интегралдық теңдеуге Лапластық түрлендіру мен көбейту теоремасын қолдансақ

$$\tilde{\varphi}(p) = \frac{1}{p} + \frac{p}{p^2 - 1} \tilde{\varphi}(p)$$

немесе

$$\tilde{\varphi}(p) \cdot \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 - 1} \right) = \frac{1}{p},$$

яғни

$$\tilde{\varphi}(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{\left(p - \frac{1}{p} \right)^2 - \frac{5}{4}},$$

Бұл өрнектен Лапластың кері түрлендіруі бойынша

$$\varphi(x) = 1 + \frac{2}{\sqrt{s}} e^{\frac{x^2}{2}} \text{sh} \frac{\sqrt{5}}{2} x.$$

Мына төмендегі берілген Вольтерраның 2-текті интегралдық теңдеулерін Лапластың интегралдық түрлендіру әдісімен шешіңіз.

$$5.1. \quad \varphi(x) = e^x - x - 1 - \int_0^x \varphi(s) ds.$$

$$5.2. \quad \varphi(x) = \frac{x^2}{2} + \int_0^x (x-s) \varphi(s) ds.$$

$$5.3. \quad \varphi(x) = x e^{2x} - \int_0^x e^{2(x-s)} \varphi(s) ds.$$

$$5.4. \quad \varphi(x) = \sin x + \int_0^x \cos(x-s) \varphi(s) ds.$$

$$5.5. \quad \varphi(x) = e^x + \int_0^x \sin(x-s) \varphi(s) ds.$$

$$5.6. \quad \varphi(x) = \sin x - \int_0^x \text{sh}(x-s) \varphi(s) ds.$$

$$5.7. \quad \varphi(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \int_0^x (x-s)^2 \varphi(s) ds.$$

$$5.8. \quad \varphi(x) = e^{2x} + \int_0^x (x-s) e^{x-s} \varphi(s) ds.$$

$$5.9. \quad \varphi(x) = 1 + \int_0^x \cos(x-s) \sin(x-s) \varphi(s) ds.$$

$$5.10. \quad \varphi(x) = 1 + x \cos x - \sin x + \int_0^x (x-s) \sin(x-s) \varphi(s) ds.$$

Кейбір жағдайда Вольтерраның 2-текті үйірткі типіндегі интегралдық теңдеулерін алдымен теңдеудің резольвентасын табу үшін Лаплас түрлендіруін қолданады, яғни интегралдық теңдеудің өзегі $K(x, s) = K(x - s)$ болғандықтан, (160) теңдеудің $a = 0$ үшін/

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x K(x, s)\varphi(s)ds$$

шешімін

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x R(x - s)f(s)ds \quad (162)$$

түрінде жазуға болады, мұндағы, $R(x - s) = R(x, s; \lambda)$, ал $R(x, s; l)$ болса, $K(x, s) = K(x - s)$ өзектің резольвентасы болады. (160) және (162) теңдеулердің екі жағына да Лаплас түрлендіруін қолдансақ, онда

$$\tilde{\varphi}(p) = \tilde{F}(p) + \tilde{K}(p)\tilde{\varphi}(p), \quad \tilde{\varphi}(p) = \tilde{F}(p) + \tilde{R}(p)\tilde{F}(p)$$

өрнектерін аламыз. Бұдан

$$\tilde{F}(p) = \frac{\tilde{K}(p)}{1 - \tilde{K}(p)}. \quad (163)$$

Бұл теңдеуге Лапластың кері түрлендіруін қолданып, $R(x - s)$ резольвентаны анықтаймыз, яғни (160) теңдеуінің шешімін (162) түрінде табамыз.

Мына интегралдық теңдеулердің өзектеріне Лаплас түрлендіруін қолданып шешіңіз:

$$5.11. \quad \varphi(x) = 1 + \int_0^x e^{-2(x-s)}\varphi(s)ds.$$

$$5.12. \quad \varphi(x) = 2 + \frac{1}{6} \int_0^x (x-s)^3 \varphi(s)ds.$$

$$5.13. \quad \varphi(x) = e^{-x} + \int_0^x e^{-(x-s)} \sin(x-s)\varphi(s)ds.$$

$$5.14. \quad \varphi(x) = e^{-\frac{x}{2}} + \int_0^x (1 - e^{-(x-s)})\varphi(s)ds.$$

$$5.15. \quad \varphi(x) = 1 + \int_0^x e^{\frac{x-1}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}(x-s)\varphi(s)ds$$

§ 8.6. Вольтерраның 1-текті интегралдық теңдеулері және оларды шешу тәсілдері

Біз жоғарыда

$$\int_0^x K(x, s)\varphi(s)ds = f(x) \quad (164)$$

өрнегі Вольтерраның 1-текті интегралдық теңдеуі екенін келтіргенбіз. Мұндағы, $\varphi(x)$ – белгісіз функция, ал $K(x,s)$ пен $f(x)$ – белгілі функциялар.

Егер (164) теңдеудегі $K(x,s)$ өзекпен $f(x)$ бос мүшесінің $K'_x(x,s)$, $f'(x)$ туындылары $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз және сол кесіндіде $K(x,x) \neq 0$ болса, онда (164) теңдеуін x айнымалысы бойынша дифференциалдап, Вольтер-раның 2-текті интегралдық теңдеуіне келтіруге болады, яғни

$$K(x,x)\varphi(x) + \int_a^x \frac{\partial K(x,s)}{\partial x} \varphi(s) ds = f'(x).$$

Бұдан

$$\varphi(x) = \frac{f'(x)}{K(x,x)} + \int_a^x \frac{1}{K(x,x)} \cdot \frac{\partial K(x,s)}{\partial x} \varphi(s) ds$$

Вольтерраның 2-текті интегралдық теңдеуі алынды. Мұндай теңдеулерді жоғарыда келтірілген әдістермен шеше аламыз. Енді осыған нақты мысалдар келтірейік:

1-мысал. Мына

$$\int_a^x (2 + x^2 - s^2) \varphi(s) ds = x^2$$

Вольтерраның 1-текті интегралдық теңдеуін шешейік.

Бұл теңдеуді x айнымалысы бойынша дифференциалдасак,

$$2\varphi(x) + \int_a^x 2x\varphi(s) ds = 2x$$

немесе

$$\varphi(x) = x - \int_a^x x\varphi(s) ds.$$

Біз 2-текті интегралдық теңдеуін алдық. Мұндағы, $u(x) = \int_a^x \varphi(s) ds$. десек, онда

$$\varphi(x) = x - xu(x), u'(x) = \varphi(x) \Rightarrow u'(x) = x(1 - u(x))$$

немесе

$$u'(x) + u(x) \cdot x = x, u(0) = 0.$$

Соңғы есептің шешімі

$$u(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2}},$$

демек,

$$\varphi(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}}.$$

2-мысал. Мына

$$\int_0^x e^{x-s} \varphi(s) ds = x$$

үйірткі түріндегі Вольтерраның 1-текті интегралдық теңдеуін шешу үшін Лапластын түрлендіруін қолданамыз:

$$\frac{1}{p-1} \tilde{\varphi}(p) = \frac{1}{p^2} \Rightarrow \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = 1-x.$$

Демек, теңдеудің шешімі

$$\varphi(s) = 1-x.$$

Ескерту. Егер Вольтерраның 1-текті интегралдық теңдеуіндегі өзегі $K(x, x) = 0$ болса, онда соңғы өзекті тағы да дифференциалдап нәтижесінде жаңадан пайда болған теңдеудің өзегі $s = x$ мәнінде нөл болмаса, онда біз 2-текті интегралдық теңдеуге келеміз. Кейбір жағдайда қажет болса осы үдерісті қайталау керек.

Мына төменде берілген Вольтерраның 1-текті интегралдық теңдеулерін 2-текті теңдеуге келтіріп шешіңіз:

$$6.1. \int_0^x (x-s) \varphi(s) ds = e^x - x - 1.$$

$$6.2. \int_0^x e^{x-s} \varphi(s) ds = \frac{x^2}{2}.$$

$$6.3. \int_0^x 3^{x-s} \varphi(s) ds = x.$$

$$6.4. \int_0^x \sin(x-s) \varphi(s) ds = 1 - \cos x.$$

$$6.5. \int_0^x \sinh(x-s) \varphi(s) ds = \sinh x - x.$$

$$6.6. \int_0^x (x-s)^2 \varphi(s) ds = x^3.$$

$$6.7. \int_0^x (x-s)^2 \varphi(s) ds = x^3 + x^2.$$

$$6.8. \int_0^x (1+x-s) \varphi(s) ds = \frac{1}{2} e^{-x} \sin x.$$

$$6.9. \int_0^x (1-x^2+s^2) \varphi(s) ds = \frac{x^2}{2}.$$

$$6.10. \int_0^x (2s-x) \varphi(s) ds = x^3 - 1.$$

Ал мына 1-текті үйірткі түріндегі теңдеулерді Лапластың түрлендіруін қолданып шешіңіз:

$$6.11. \int_0^x (x-s)\varphi(s)ds = chx - 1.$$

$$6.12. \int_0^x \sin(x-s)\varphi(s)ds = \frac{1}{2}x^4.$$

$$6.13. \int_0^x \cos(x-s)\varphi(s)ds = x \sin x.$$

$$6.14. \int_0^x sh(x-s)\varphi(s)ds = 2 \sin^2 \frac{x}{2}.$$

$$6.15. \int_0^x e^{x-s} \cos(x-s)\varphi(s)ds = xe^x.$$

$$6.16. \int_0^x \cos(x-s)\varphi(s)ds = \sin x, \text{ жауабы: } \varphi(x) = 1.$$

$$6.17. \int_0^x e^{x-s} \varphi(s)ds = shx, \text{ жауабы: } \varphi(x) = e^{-x}.$$

$$6.18. \int_0^x (x-s)^{\frac{1}{2}} \varphi(s)ds = x^{\frac{5}{2}}, \text{ жауабы: } \varphi(x) = \frac{15}{4}x.$$

$$6.19. \int_0^x e^{2(x-s)} \varphi(s)ds = \sin x, \text{ жауабы: } \varphi(x) = \cos x - 2 \sin x.$$

$$6.20. \int_0^x e^{x-s} \varphi(s)ds = x^2, \text{ жауабы: } \varphi(x) = 2x - x^2.$$

Абельдің интегралдық теңдеуі

$$\int_0^x \frac{\varphi(t)}{\sqrt{x-t}} dt = f(x),$$

ал Абельдің жалпылама теңдеуі:

$$\int_0^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^\alpha} dt = f(x), \quad 0 < \alpha < 1.$$

• **Ескерту.** Абель теңдеуін 2-типке келтіруге болмайды.

Абель теңдеуін шешу үшін мынадай әдіс қолданылады. Абель теңдеуінің екі жағын $\frac{1}{(x-s)^{1-\alpha}}$ көбейтіп, s айнымалы бойынша 0-ден x -ке дейін интегралдасақ:

$$\int_0^x \frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}} \int_0^s \frac{\varphi(t)}{(s-t)^\alpha} dt = \int_0^x \frac{f(s)}{(x-s)^{1-\alpha}} ds$$

немесе

$$\int_0^x \varphi(t) \left(\int_t^x \frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}(s-t)^\alpha} \right) dt = \int_0^x \frac{f(s)}{(x-s)^{1-\alpha}} ds.$$

Бұған мына теңдікті пайдалансақ,

$$\int_t^x \frac{ds}{(x-s)^{1-\alpha}(s-t)^\alpha} = \frac{\pi}{\sin \alpha \pi},$$

онда

$$\int_0^x \varphi(t) dt = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^x \frac{f(s)}{(x-s)^{1-\alpha}(x-s)^{1-\alpha}} ds.$$

Енді x бойынша дифференциалдаймыз, сонда

$$\varphi(x) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(s)}{(x-s)^{1-\alpha}} ds = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \left[\frac{f(0)}{x^{1-\alpha}} + \int_0^x \frac{f'(s)}{(x-s)^{1-\alpha}} ds \right].$$

Мысалы, мынадай түрдегі теңдеулер

$$\int_0^x (x-t)^\beta \varphi(t) dt = f(x), \quad \beta > -1 \quad (165)$$

Абель теңдеуіне келеді. Егер мұндағы, $\beta > 0$ болса, онда теңдеудің екі жағын да дифференциалдап, Абель теңдеуін алуға болады.

$$\begin{aligned} \beta \int_0^x (x-t)^{\beta-1} \varphi(t) dt &= f'(x), \\ \beta(\beta-1) \int_0^x (x-t)^{\beta-2} \varphi(t) dt &= f''(x), \dots \end{aligned}$$

1-мысал.

$$\int_0^x (x-t)^{2,5} \varphi(t) dt = x^{3,7},$$

теңдеуін үш рет дифференциалдасақ:

$$(2,5) \int_0^x (x-t)^{1,5} \varphi(t) dt = 3,7 x^{2,7},$$

$$(2,5)(1,5) \int_0^x (x-t)^{0,5} \varphi(t) dt = (3,7)(2,7) x^{1,7},$$

$$(2,5)(1,5)(0,5) \int_0^x (x-t)^{0,5} \varphi(t) dt = (3,7)(2,7)(1,7)x^{0,7}$$

нәтижесінде Абель теңдеуіне келеміз.

• **Ескерту.** (165) теңдеуге жоғарыдағы әдісті қолдануға болады. Ол үшін оған $(x-s)^\mu$ ($\mu > -1$)-ді көбейту керек.

Мына

$$\int_0^x (x-s)^\mu (s-t)^\beta ds = \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\beta+\mu+2)} \cdot (x-t)^{\beta+\mu+1}$$

теңдікті және μ санын $\beta + \mu + 1 = n > 0$ натурал санына тең болатындай таңдайды.

Мына теңдеулерді Лаплас түрлендіруін пайдаланып шешіңіз:

$$6.16. \int_0^x \frac{\varphi(s)}{(x-s)^{\frac{1}{3}}} ds = e^x - 1, \quad \varphi(x) = -\frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\pi} \left[\int_0^x \frac{e^x}{(x-s)^{\frac{2}{3}}} ds \right].$$

$$6.17. \int_0^x \frac{\varphi(s)}{(x-s)^{\frac{2}{3}}} ds = \cos x - 1, \quad \varphi(x) = -\frac{\sin \frac{2\pi}{3}}{\pi} \left[\int_0^x \frac{\sin x}{(x-s)^{\frac{1}{3}}} ds \right].$$

$$6.18. \int_0^x \frac{\varphi(s)}{\sqrt{x-s}} ds = \sqrt{x} - x, \quad \varphi(x) = -\frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\pi} \left[\int_0^x \left(\frac{1}{2\sqrt{s}} - \frac{1}{(x-s)^{\frac{1}{2}}} \right) ds \right].$$

$$6.19. \int_0^x (x-s)^{\frac{3}{4}} \varphi(s) ds = x^{\frac{5}{2}} + 3x^2.$$

$$6.20. \int_0^x (x-s)^{\frac{3}{2}} \varphi(s) ds = x^3 + 2x.$$

$$6.21. \int_0^x (x-s)^2 \varphi(s) ds = x^5 + 2x^{\frac{3}{2}}.$$

$$6.22. \int_0^x (x-s)^{\frac{5}{2}} \varphi(s) ds = \frac{1}{4}x^4 + x^3.$$

§8.7. Шекарасы $(x, +\infty)$ болған Вольтерраның интегралдық теңдеулері

Мына

$$\varphi(x) = f(x) + \int_x^{\infty} K(x-t)\varphi(t) dt \quad (166)$$

Вольтерраның интегралдық теңдеуін Лаплас түрлендіруімен шешуге болады. Лаплас түрлендіруінің қасиеті бойынша

$$\int_x^{\infty} K(x-t)\varphi(t) dt \div \tilde{K}(-p)\tilde{\varphi}(p) \quad (167)$$

орынды, мұндағы,

$$\tilde{K}(-p) = \int_0^{\infty} K(-x)e^{px} dx, \quad \tilde{\varphi}(p) = \varphi(t).$$

Интегралдық (166) теңдеуге Лаплас түрлендіруін қолданып,

$$\tilde{\varphi}(p) = \tilde{F}(p) + \tilde{K}(-p)\tilde{\varphi}(p)$$

өрнегін аламыз, бұдан

$$\tilde{\varphi}(p) = \frac{\tilde{F}(p)}{1 - \tilde{K}(-p)}, \quad (\tilde{K}(-p) \neq 1).$$

Егер $\tilde{K}(-p)$, $\tilde{f}(p)$ функциялардың аналитикалық функциясы болатын аймақтары бір-бірімен қиылысып жататын болса, онда берілген теңдеудің жеке шешімі үшін

$$\varphi(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{A-i\infty}^{A+i\infty} \frac{\tilde{F}(p)}{1 - \tilde{K}(-p)} e^{px} dp. \quad (168)$$

Мысалы.

$$\varphi(p) = x + \int_x^{\infty} e^{2x-t} \varphi(t) dt$$

интегралдық теңдеуіне Лаплас түрлендіруін пайдалансақ,

$$\tilde{\varphi}(p) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{2-p} \tilde{\varphi}(p) \Rightarrow \tilde{\varphi}(p) = \frac{p-2}{p^2(p-1)},$$

демек,

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{A-i\infty}^{A+i\infty} \frac{e^{px}}{p^2} \cdot \frac{p-2}{p-1} dp \quad (0 < A < 2).$$

Мұны шегерінді әдісімен шешіп ($p=0$, $p=1$ - ерекше нүктелер), нәтижесінде теңдеудің шешімі

$$\varphi(x) = 2x + 1 + Ce^x, \quad C = \text{const.}$$

Мына интегралдық теңдеулерді шешіңіз:

$$7.1. \quad \varphi(x) = e^{-x} + \int_x^{\infty} \varphi(s) ds.$$

$$7.2. \quad \varphi(x) = e^{-x} + \int_x^{\infty} e^{x-s} \varphi(s) ds.$$

$$7.3. \quad \varphi(x) = \cos x + \int_x^{\infty} e^{x-s} \varphi(s) ds.$$

$$7.4. \quad \varphi(x) = 1 + \int_x^{\infty} e^{a(x-s)} \varphi(s) ds. \quad (a > 0).$$

9. ФРЕДГОЛЬМНІҢ ИНТЕГРАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРІ

§ 9.1. Фредгольмнің 2-текті интегралдық теңдеулерін біртіндеп жуықтап шешу

Мына

$$\varphi(x) - \int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds = f(x) \quad (169)$$

Фредгольмнің 2-текті интегралдық теңдеуін қарастырайық, мұндағы, $K(x,s)$ өзегі мен $f(x)$ бос мүшесі $[a,b]$ кесіндіде берілген функциялар.

Егер $a \leq x \leq s$ болғанда, $K(x,s) = 0$ болса, онда (169) теңдеу Вольтерраның 2-текті интегралдық теңдеуіне айналады. (169) теңдеуіндегі $K(x,s), f(x)$ функциялар:

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,s)|^2 dx ds \equiv B^2 < +\infty, \quad (170)$$

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < +\infty, \quad (171)$$

теңсіздіктерін, яғни $K(x,s), f(x) \in L_2[a,b]$ шарттарын қанағаттандырсын.

Әдетте, (169) теңдеудің бір өзі емес

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds = f(x) \quad (172)$$

түріндегі λ параметріне тәуелді теңдеулер жиыны қарастырылады. Бұл теңдеудің

$$|\lambda| < \frac{1}{B} \quad (173)$$

шартын қанағаттандырғанда ғана жалғыз шешімі болады. Ол шешімді біртіндеп жуықтау әдісімен табады. Ол үшін (172) теңдеуін

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds$$

түрінде жазып, одан кейін нөлдік жуық шешімі үшін $\varphi_0(x)$ функциясын қалағанымызша тандап алып, жуық шешімдерінің $\varphi_n(x)$, $n = 0,1,2,\dots$ тізбегін құрамыз, мұнда

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,s) \varphi_{n-1}(s) ds, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Егер мұндағы, λ параметрі (173) шартын қанағаттандырса, онда $\{\varphi_n(x)\}$ жуықтау тізбегі $n \rightarrow \infty$ жағдайда $\varphi(x)$ шешімге жинақты болады.

Мысалы.

$$\varphi_n(x) = -\frac{1}{2} \int_0^1 \varphi(s) ds = \sin \pi x$$

теңдеуін біртіндеп жуықтау әдісімен шешейік.

Шешуі. Берілген теңдеуді (172) теңдеуімен салыстырсақ, $\lambda = \frac{1}{2}$, $K(x,s) = 1$;

$f(x) = \sin \pi x$ немесе

$$B^2 = \int_0^1 \int_0^1 |K(x,s)|^2 dx ds = 1,$$

олай болса,

$$\lambda = \frac{1}{2} < 1, \quad \int_0^1 \sin^2 \pi x ds < +\infty.$$

Енді $\varphi_0(x) = \sin \pi x$ нөлдік жуық шешімі десек, онда

$$\varphi_1(x) = \sin \pi x + \frac{1}{2} \int_0^1 \sin \pi s ds = \sin \pi x + \frac{1}{\pi},$$

$$\varphi_2(x) = \sin \pi x + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\sin \pi s + \frac{1}{\pi} \right) ds = \sin \pi x + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi},$$

$$\varphi_3(x) = \sin \pi x + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\sin \pi s + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi} \right) ds = \sin \pi x + \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{4\pi},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\varphi_n(x) = \sin \pi x + \frac{1}{2} \int_0^1 \varphi_{n-1}(s) ds = \sin \pi x + \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k}.$$

$$\text{Бұдан } \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \sin \pi x + \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \sin \pi x + \frac{2}{\pi}$$

яғни

$$\varphi(x) = \sin \pi x + \frac{2}{\pi}.$$

Мына төменде берілген Фредгольмнің 2-текті интегралдық теңдеулерін біртіндеп жуықтау әдісімен шешіңіз:

$$1.1. \quad \varphi(x) - \int_0^1 x s \varphi(s) ds = 2x.$$

$$1.2. \quad \varphi(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \cos^2 s \varphi(s) ds = 1.$$

$$1.3. \varphi(x) - \pi \int_0^1 (1-x) \sin 2\pi s \varphi(s) ds = \frac{1}{2}(1-x).$$

$$1.4. \varphi(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi s \sin x \varphi(s) ds = 2 \sin x.$$

$$1.5. \varphi(x) + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [\cos(x+s) + \cos(x-s)] \varphi(s) ds = \cos x.$$

$$1.6. \varphi(x) = x + 4 \int_0^1 x^2 s^2 \varphi(s) ds.$$

Жауабы: $\varphi(x) = x + 5x^2$, егер $\varphi_0(x) = x$.

$$1.7. \varphi(x) = \frac{5}{6}x + \frac{1}{2} \int_0^1 xs \varphi(s) ds.$$

Жауабы: $\varphi(x) = x$, егер $\varphi_0(x) = 0$.

Қайталанған өзекпен резольвентаны құру

Егер нөлдік жуық мәні үшін (172) интегралдық теңдеудегі $\varphi_0(x) = f(x)$ болса, онда n -жуықтау шешімі үшін:

$$\varphi_0(x) = f(x) + \sum_{j=1}^n \lambda^j \int_a^b K_j(x,s) f(s) ds = f(x) + \lambda \int_a^b \left(\sum_{j=1}^n \lambda^{j-1} K_j(x,s) \right) f(s) ds \quad (174)$$

Мұндағы тізбектелген өзектер:

$$\begin{aligned} K_1(x,s) &= K(x,s), \\ K_j(x,s) &= \int_a^b K(x,t) K_{j-1}(t,s) dt, \quad j = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (175)$$

өрнектерімен анықталған. Егер $|\lambda| < \frac{1}{B}$ орындалса, онда:

$$R(x,s;\lambda) = \sum_{j=1}^n \lambda^{j-1} K_j(x,s) \quad (176)$$

қатар жинақты болады. Бұл (176) өрнегі (172) интегралдық теңдеуінің резольвентасы деп аталады.

Сонымен, $n \rightarrow \infty$ жағдайда $|\lambda| < \frac{1}{B}$ болса, (174) жуықтау шешімдер тізбегі

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x,s;\lambda) f(s) ds \quad (177)$$

өрнегіне жинақталады. Бұл алынған (177) өрнегі жоғарыдағы берілген (172) интегралдық теңдеуінің шешімі болады.

Мысал. Тізбектелген өзектер арқылы

$$\varphi(x) = 1 + x^2 + \frac{1}{\ln 2} \int_0^1 \frac{2x}{1+s^2} (1+s^2) ds = 1 + \frac{2x}{\ln 2} + x^2,$$

яғни

$$\varphi(x) = 1 + \frac{2}{\ln 2} x + x^2.$$

Өзектерді тізбектей анықтау әдісімен мына теңдеулердің резольвенталарын есептеңіз және теңдеулерді шешіңіз:

$$1.6. \quad \varphi(x) - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \varphi(s) ds = \sin x.$$

$$1.7. \quad \varphi(x) - \frac{\ln 2}{2} \int_0^1 2^{x+1} \varphi(s) ds = x.$$

$$1.8. \quad \varphi(x) + \pi \int_0^1 x \sin 2\pi s \varphi(s) ds = \cos 2\pi x.$$

$$1.9. \quad \varphi(x) - \frac{1}{2} \int_0^1 x e^s \varphi(s) ds = e^{-x}.$$

$$1.10. \quad \varphi(x) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos s \varphi(s) ds = 1.$$

§ 9.2. Өзегі қарапайым Фредгольмнің 2-текті интегралдық теңдеулерін шешу

Анықтама. Егер $K(x, s)$ өзегін

$$K(x, s) = \sum_{j=1}^n P_j(x) q_j(s) \quad (180)$$

түрінде өрнектеуге болса, онда оны қарапайым деп атайды.

Мына

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = f(x) \quad (181)$$

интегралдық теңдеудің шешімін табайық.

(181) теңдеудің (180) өзегі қарапайым кезде

$$\varphi(x) - \int_a^b \left(\sum_{j=1}^n P_j q_j(s) \right) \varphi(s) ds = f(x) \quad (182)$$

болады. Бұл теңдеуді

$$\varphi(x) - \sum_{j=1}^n P_j(x) Z_j = f(x) \quad (183)$$

түрінде жазамыз, мұндағы,

$$Z_j = \int_a^b q_j(s) \varphi(s) ds, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (184)$$

Егер (183) теңдеуінің екі жағын да $q_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, n$. функцияларына көбейтіп, одан кейін a -дан b -ға дейін x айнымалысы бойынша интегралдасак, онда біз Z_j , $j = 1, 2, \dots, n$. белгісіз коэффициентін анықтайтын

$$Z_j - \sum_{j=1}^n (q_i(x) P_j(x) Z_j) = \int_a^b q_j(x) f(x) dx, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (185)$$

алгебралық сызықтық теңдеулер жүйесін аламыз.

Енді

$$a_{ij} = \int_a^b q_i(x) P_j(x) dx, f_i = \int_a^b q_i(x) f(x) dx \quad (186)$$

деп белгілесек, онда (185) теңдеулер жүйесі

$$Z_j - \sum_{j=1}^n a_{ij} Z_j = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (187)$$

түрінде жазылады. Немесе мұны матрица түрінде жазатын болсақ, онда

$$(E - A) \vec{S} = \vec{F}, \quad (188)$$

мұндағы, E - бірлік матрица, $\vec{S} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)^T$,

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^n, \quad \vec{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T.$$

Егер $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ шамалары (187) теңдеулер жүйесінің кез келген шешімі болса, онда (183) теңдеуге байланысты

$$\varphi(x) = f(x) + \sum_{j=1}^n P_j(x) Z_j$$

функциясы берілген интегралдық теңдеудің шешімі болады. Егер (187) теңдеулер жүйесінің бір мәнді шешімі болмаса, онда (181) интегралдық теңдеудің де бірімәнді шешімі болмайды.

$$\text{Мысалы, } \varphi(x) - \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{\pi} \sin x \sin s + s \right) \varphi(s) ds = \sin 2x \quad \text{теңдеуін жоғарыда}$$

берілген әдіспен шешейік:

$K(x, s) = \frac{1}{\pi} \sin x \sin s + s$ -қарапайым өзек, олай болса $P_1(x) = \frac{1}{\pi} \sin x$, $P_2(x) = 1$,
 $q_1(s) = \frac{1}{\pi} \sin s$, $q_2(s) = s$ деп алсақ, онда (186) өрнегі бойынша

$$\begin{aligned} a_{11} &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi} \sin^2 x dx = 1, & a_{12} &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\pi} \sin x dx = 0, \\ a_{21} &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x}{\pi} \sin x dx = 2, & a_{22} &= \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0, \\ f_1 &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \sin 2x dx = 0, & f_2 &= \int_{-\pi}^{\pi} x \sin 2x dx = -\pi. \end{aligned}$$

Сондықтан (187) теңдеулер жүйесі

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\pi \end{pmatrix}$$

түрінде жазылып, оның жалпы шешімі $z_1 = C$, $z_2 = -\pi + 2C$ болады, демек,

$$\varphi(x) = \sin 2x + C \left(\frac{1}{\pi} \sin x + 2 \right) - \pi,$$

яғни осындай кез келген функция берілген интегралдық теңдеудің шешімі болады.

Мына төмендегі өзегі қарапайым Фредгольмнің 2-текті интегралдық теңдеулерін шешіңіз немесе олардың ішіндегі шешімі жоқ теңдеулерін көрсетіңіз:

$$2.1. \quad \varphi(x) - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos x \sin s \varphi(s) ds = \sin x.$$

$$2.2. \quad \varphi(x) - \frac{2l}{l^2 - 1} \int_0^1 chx \varphi(s) ds = 1.$$

$$2.3. \quad \varphi(x) - \frac{24}{7} \int_0^1 (1 - x^2) \left(1 - \frac{3s}{2} \right) \varphi(s) ds = x.$$

$$2.4. \quad \varphi(x) - \int_0^1 (1 + x) \cos 2\pi s \varphi(s) ds = x.$$

$$2.5. \quad \varphi(x) - \int_0^1 x \varphi(s) ds = \cos^2 x.$$

$$2.6. \quad \varphi(x) - 4 \int_0^1 xs^2 \varphi(s) ds = 0.$$

$$2.7. \quad \varphi(x) + \int_0^1 e^x s \varphi(s) ds = 0.$$

$$2.8. \quad \varphi(x) - \int_0^1 (2x - s)\varphi(s)ds = \cos 2\pi x.$$

$$2.9. \quad \varphi(x) - \int_0^1 (1 + 2xs)\varphi(s)ds = -\frac{1}{6}(x + 3).$$

$$2.10. \quad \varphi(x) - \int_0^1 \left(\frac{3}{2}xs + x^2(s-1) \right) \varphi(s)ds = 0.$$

§ 9.3. Интегралдық теңдеулердің меншікті сандары мен меншікті функциялары

Анықтама. Мына

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds = 0 \quad (189)$$

біртекті интегралдық теңдеудің нөлге тең емес шешіміне сәйкес келетін λ параметрінің (189) теңдеудің сипаттаушы сан мәні, ал теңдеудің нөлге тең емес шешімін меншікті функция деп атайды. $\lambda = 0$ болса, онда ол бұл теңдеудің тек қана нөлдік шешімі болады. Егер λ сипаттаушы саны болса, онда $\mu = \frac{1}{\lambda}$ интегралдық теңдеудің меншікті саны деп аталады. 9.2 параграфта берілген теңдеуге сәйкес келетін өзегі қарапайым біртекті

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b \left(\sum_{j=1}^n P_j(x)q_j(s) \right) \varphi(s)ds = 0$$

интегралдық теңдеудің шешімі

$$\varphi(x) = \lambda \sum_{j=1}^n Z_j P_j(x)$$

функциясы түрінде жазылады, мұндағы,

$$\vec{S} = (Z_1, Z_2, \dots, Z_n)^T \quad (E - \lambda A)\vec{S} = 0$$

теңдеудің шешімі болады, ал $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$,

$$a_{ij} = \int_a^b q_i(x)P_j(x)dx, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

1-мысал.

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 (xs - 2x^2)\varphi(s)ds = 0$$

теңдеудің сипаттаушы саны мен меншікті функциясын анықтайық. $K(x, s) = xs - 2x^2$ – қарапайым өзек. Ал

$P_1(x) = x$, $P_2(x) = -2x^2$, $q_1(s) = s$, $q_2(s) = 1$ деп алып, A матрицасының

$$a_{11} = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}, \quad a_{12} = -2 \int_0^1 x^3 dx = -\frac{1}{2},$$

$$a_{21} = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}, \quad a_{22} = -2 \int_0^1 x^2 dx = -\frac{2}{3}$$

элементтерін анықтаймыз. Олай болса,

$$\det(A - \mu E) = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} - \mu & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} - \mu \end{vmatrix} = \left(\mu + \frac{1}{6} \right)^2 = 0.$$

Мұндағы, $\mu = -\frac{1}{6}$ - бір ғана A матрицасының меншікті саны. Бұған сәйкес келетін меншікті векторларды

$$\left(A + \frac{1}{6} E \right) \vec{S} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

теңдеу жүйесінен анықтаймыз: $Z_1 = C$, $Z_2 = C$.

Олай болса, $\lambda = \frac{1}{\mu} = -6$, ал оған сәйкес келетін меншікті функция

$$\varphi(x) = -6(Z_1 x - 2Z_2 x^2) = C(x - 2x^2),$$

мұндағы, C – кез келген тұрақты шама.

Ескерту. Кейбір жағдайларда (егер интегралдық теңдеу Вольтерра түріндегі немесе өзегі қарапайым интегралдық теңдеу, яғни (188) теңдеуіндегі A матрицасы нөлдік матрица болса) интегралдық теңдеудің сипаттаушы саны болмайды.

2-мысал. Мына

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} x \cos s \varphi(s) ds = 0$$

интегралдық теңдеулердің сипаттаушы саны мен меншікті функциясын табайық:

$$\varphi(x) - \lambda x z = 0, \quad z = \int_{-\pi}^{\pi} \cos s \varphi(s) ds,$$

бұдан

$$\varphi(z) - \lambda z \int_{-\pi}^{\pi} x \cos x dx = 0.$$

Мұнда, $\int_{-\pi}^{\pi} x \cos x dx = 0$ болғандықтан, λ санының кез келген мәні үшін бұл теңдеудің жалғыз ғана $z = 0$ шешімі болады. Демек, кез келген λ үшін берілген интегралдық теңдеудің тек нөлдік шешімі болады, яғни сипаттаушы саны болмайды.

Мына төменде берілген өзегі қарапайым интегралдық теңдеулердің сипаттаушы мәндері мен меншікті функцияларын табыңыз:

$$3.1. \quad \varphi(x) - \lambda \int_0^1 (1 + 2x)s \varphi(s) ds = 0.$$

$$3.2. \quad \varphi(x) - \lambda \int_0^1 (1 - x^2) \varphi(s) ds = 0.$$

$$3.3. \quad \varphi(x) - \lambda \int_{-1}^1 |x| \varphi(s) ds = 0.$$

$$3.4. \quad \varphi(x) - \lambda \int_0^{\pi} x \sin s \varphi(s) ds = 0.$$

$$3.5. \quad \varphi(x) - \lambda \int_0^{\pi} \cos x \cos s \varphi(s) ds = 0.$$

$$3.6. \quad \varphi(x) - \lambda \int_0^1 (x + s) \varphi(s) ds = 0.$$

$$3.7. \quad \varphi(x) - \lambda \int_0^1 (xe^s + 2s) \varphi(s) ds = 0.$$

$$3.8. \quad \varphi(x) - \lambda \int_0^1 \left(x \sin 2\pi s - \frac{1}{2\pi} \right) \varphi(s) ds = 0.$$

$$3.9. \quad \varphi(x) - \lambda \int_0^{\pi} \sin(x + s) \varphi(s) ds = 0.$$

$$3.10. \quad \varphi(x) - \lambda \int_0^{\pi} \cos(x - s) \varphi(s) ds = 0.$$

§ 9.4. Фредгольм теоремалары

Фредгольмнің 2-текті интегралдық теңдеуінің

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \varphi(s) ds = f(x) \quad (190)$$

өзегі және бос мүшесі $K(x,s), f(x) \in L_2[a,b]$ болса, онда төмендегі тұжырымдар орынды.

1°. Фредгольм теңдеуінің санақты жиыннан артық сипаттаушы сандары болмайды, олар тек шексіздікте шоғырланады.

2°. Егер λ сипаттаушы сан болмаса, онда берілген интегралдық теңдеумен оған түйіндес теңдеулер кез келген бос мүше үшін әрқайсысы бірімәнді шешіледі.

Ал бұлардың сәйкес біртекті теңдеулерінің тек нөл шешімдері болады.

3°. Егер λ сипаттаушы сан болса, онда біртекті интегралдық теңдеу нөлге тең немесе тең ақырлы санды шешімдері болады.

4°. Егер λ сипаттаушы сан болса, онда біртекті интегралдық теңдеу шешілуі үшін бос мүшенің сәйкес біртекті түйіндес теңдеудің барлық шешімдеріне ортогонал болуы қажетті және жеткілікті

Мысал. Мына

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 \cos s + x \sin s) \varphi(s) ds = \cos x \quad (191)$$

теңдеудің шешімдерінің λ параметрге тәуелділік жағдайларын зерттейік. Бұл теңдеуді шешу үшін алдымен,

$$(E - \lambda A) \vec{S} = \vec{F} \quad (192)$$

теңдеулер жүйесін шешуіміз қажет, мұндағы,

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^n, \quad a_{ij} = \int_a^b q_i(x) f_j(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$\vec{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T, \quad f_i = \int_a^b q_i(x) f(x) dx, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

Бұл теңдеу бойынша $P_1(x) = x^2$, $P_2(x) = x$, $q_1(s) = \cos s$, $q_2(s) = \sin s$;

$$a_{11} = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \cdot x^2 dx = 4\pi, \quad a_{12} = \int_{-\pi}^{\pi} x \cos x dx = 0,$$

$$a_{21} = \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin x dx = 0, \quad a_{22} = \int_{-\pi}^{\pi} x \sin x dx = 2\pi,$$

$$f_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x dx = \pi, \quad f_2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos 2x dx = 0.$$

Бұдан (192) теңдеулер жүйесі

$$\begin{pmatrix} 1 - 4\pi\lambda & 0 \\ 0 & 1 + 2\pi\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (193)$$

түрінде жазылады.

Мына

$$\det(E - \lambda A) = (1 + 2\pi\lambda)(1 - 4\pi\lambda) = 0$$

сипаттамалық теңдеудің $\lambda_1 = \frac{1}{4\pi}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2\pi}$ түбірлері берілген интегралдық теңдеудің сәйкес біртекті теңдеуінің сипаттаушы сандары. Демек, кез келген $\lambda_1 \neq \frac{1}{4\pi}$, $\lambda_2 \neq -\frac{1}{2\pi}$ сандары үшін (193) теңдеулер жүйесінің

$$z_1 = \frac{\pi}{1 - 4\pi\lambda}, \quad z_2 = 0$$

жалғыз шешімі болады, ал бұларға сәйкес келетін (191) теңдеудің шешімі

$$\varphi(x) = \cos x + \frac{\lambda\pi}{1 - 4\pi\lambda}, \quad \lambda \neq \frac{1}{4\pi}, \quad \lambda \neq -\frac{1}{2\pi}.$$

Ал $\lambda = \lambda_1 = \frac{1}{4\pi}$ болғанда, (193) жүйесін

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$$

түрінде жазамыз. Бұл және осыған сәйкес келетін интегралдық теңдеудің шешімі болмайды. Ал $\lambda = \lambda_2 = -\frac{1}{2\pi}$ жағдайда, (193) жүйесі

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix}$$

түрінде жазылады.

Бұл жүйенің шешімдері $z_1 = \frac{\pi}{3}$, $z_2 = C$ және оған сәйкес келетін теңдеудің шешімі

$$\varphi(x) = \cos x + \lambda_2(z_1 x^2 + z_2 x) = \cos x - \frac{1}{6}x^2 + Cx.$$

Мына төмендегі өзектері қарапайым теңдеулерді λ параметрлерінің әртүрлі мәндерінде зерттеңіз:

$$4.1. \quad \varphi(x) - \lambda \int_0^1 x(1+s)\varphi(s)ds = x^2.$$

$$4.2. \quad \varphi(x) - \lambda \int_0^1 x \varphi(s) ds = \sin 2\pi x.$$

$$4.3. \quad \varphi(x) - \lambda \int_0^1 (1 + 2x) \varphi(s) ds = 1 - \frac{3}{2}x.$$

$$4.4. \quad \varphi(x) - \lambda \int_0^1 x \sin 2s \cdot \varphi(s) ds = x.$$

$$4.5. \quad \varphi(x) - \lambda \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} s \varphi(s) ds = \operatorname{ctg} x.$$

$$4.6. \quad \varphi(x) - \lambda \int_0^1 \arccos x \varphi(s) ds = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$4.7. \quad \varphi(x) - \lambda \int_0^{\pi} \sin x \cos s \varphi(s) ds = \cos x.$$

$$4.8. \quad \varphi(x) - \lambda \int_{-1}^1 (1 + xs) \varphi(s) ds = \sin \pi x.$$

$$4.9. \quad \varphi(x) - \lambda \int_{-1}^1 (x + s) \varphi(s) ds = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x.$$

$$4.10. \quad \varphi(x) - \lambda \int_0^{\pi} \cos(x + s) \varphi(s) ds = 1.$$

§ 9.5. Симметриялық өзекті Фредгольмнің 2-текті интегралдық теңдеулері

I. Егер Фредгольмнің интегралдық теңдеуінің $K(x, s)$ өзегі

$$K(x, s) = K(s, x), \quad \forall x, s \in [a, b] \quad (194)$$

шартын қанағаттандыратын болса, ондай теңдеуді симметриялық деп айтады.

Симметриялық өзекті Фредгольмнің интегралдық теңдеуі үшін жоғарыдағы 9.4 параграфта келтірілген $1^0 - 4^0$ қасиеттермен қатар мына екі тұжырым да орынды.

1. Нөлге тең болмаған симметриялық өзекті интегралдық теңдеудің ең болмағанда бір сипаттаушы саны болады.

2. Симметриялық өзектің сипаттаушы сандары нақты сандар, ал түрліше сипаттаушы сандарға сәйкес келетін меншікті функциялары ортогонал болады.

Қолданбалы есептерде симметриялық өзекті интегралдық теңдеулер кәдімгі дифференциалдық теңдеулер үшін біртекті түйіндес шеттік есептердің шешімі ретінде кездеседі.

Бұл жағдайда интегралдық теңдеудің сипаттаушы сандары мен меншікті функцияларын табу мәселесі жоғарыда айтқан дифференциалдық теңдеу үшін шеттік есепті шешуге келтіріледі.

Мысалы.

$$K(x, s) = \begin{cases} s(x+1), & 0 \leq x \leq s \leq 1, \\ (s+1)x, & 0 \leq s \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (195)$$

симметриялық өзектің сипаттаушы сандары мен меншікті функцияларын анықтайық.

Берілген өзекті біртекті

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, s) \varphi(s) ds = 0 \quad (196)$$

интегралдық теңдеуін

$$\varphi(x) = \lambda \left(x \int_0^x (s+1) \varphi(s) ds + (x+1) \int_x^1 s \varphi(s) ds \right) \quad (197)$$

түрде жазайық.

Енді осы өрнекті екі рет дифференциалдап,

$$\varphi'(x) = \lambda \left(\int_0^x (s+1) \varphi(s) ds + x(x+1) \varphi(x) + \int_x^1 s \varphi(s) ds - (x+1)x \varphi(x) \right), \quad (198)$$

$$\varphi''(x) = \lambda((x+1)\varphi(x) - x\varphi(x)) = \lambda\varphi(x) \quad (199)$$

өрнектерін аламыз. Бұлардан λ саны мен белгісіз $\varphi(x)$ функциясы

$$\varphi''(x) - \lambda\varphi(x) = 0 \quad (200)$$

теңдеуін қанағаттандыратыны шығады.

Енді $\varphi(x)$ функциясы үшін шекаралық шарттарын қарастыралық. Ол үшін (197), (198) өрнектерінің $x = 0$ және $x = 1$ болған кездегі мәндерін есептейік:

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \lambda \int_0^1 s \varphi(s) ds, & \varphi(1) &= \lambda \int_0^1 (s+1)s \varphi(s) ds, \\ \varphi'(0) &= \lambda \int_0^1 s \varphi(s) ds, & \varphi'(1) &= \lambda \int_0^1 (s+1)s \varphi(s) ds. \end{aligned}$$

Бұдан $\varphi(x)$ функциясының шекаралық шарттары

$$\varphi(0) = \varphi'(0), \quad \varphi(1) = \varphi'(1). \quad (201)$$

Сонымен интегралдық теңдеудің сипаттаушы сандары мен меншікті функцияларын табу мәселесі (200), (201) шекаралық есептің сипаттаушы сандары мен меншікті функцияларын табу есебіне келді.

Төмендегі үш жағдайдың әрқайсысын жеке-жеке қарастырайық.

1) $\lambda = 0$ болсын. Бұл жағдайда (200) теңдеуі $\varphi'' = 0$ түрінде жазылады, ал оның жалпы шешімі

$$\varphi(x) = C_1 + C_2 x \quad (202)$$

болады. Енді осы шешімге (201) шекаралық шарттарын пайдаланып $C_1 = C_2 = 0$ болатынын анықтаймыз. Сонымен, бұл жағдайда, яғни $\lambda = 0$ болса, онда $\varphi(x) = 0$.

2) $\lambda = \omega^2 > 0$ болсын. Бұл жағдайда (200) теңдеуі

$$\varphi''(x) - \omega^2 \varphi(x) = 0$$

түрінде жазылады да, оның жалпы шешімі

$$\varphi(x) = C_1 e^{\omega x} + C_2 e^{-\omega x}$$

болады. Бұл шешімге (201) шекаралық шарттарын пайдаланып, C_1 мен C_2 белгісіз коэффициенттерін анықтайтын

$$\begin{pmatrix} 1 - \omega & 1 + \omega \\ e^{\omega} - \omega e^{\omega} & e^{-\omega} + \omega e^{-\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (203)$$

теңдеулер жүйесін аламыз. Бұл жүйенің нөлге тең емес шешімі болуы үшін тек қана

$$\begin{vmatrix} 1 - \omega & 1 + \omega \\ e^{\omega} - \omega e^{\omega} & e^{-\omega} + \omega e^{-\omega} \end{vmatrix} = -2(1 - \omega^2) \operatorname{sh} \omega = 0$$

болуы қажет, яғни $\omega = \pm 1$ немесе $\lambda = \omega^2 = 1$. Бұдан $\omega = 1$ үшін (203) теңдеулер жүйесінен

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & \frac{2}{e} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

аламыз, демек, $\varphi(x) = C_1 e^x$, мұндағы, $C_1 = \text{const.}$

Дәл осылай $\omega = -1$ болғанда

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ \frac{2}{e} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ C_2 \end{pmatrix},$$

ендеше, $\varphi(x) = C_2 e^{-x}$, мұндағы, $C_2 = \text{const.}$

Сонымен $\lambda = \omega^2 > 0$ үшін кез келген меншікті функциясы $\varphi(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ өрнегімен анықталады.

3) $\lambda = -\omega^2 < 0$ болсын. Бұл жағдайда (200) теңдеуі

$$\varphi''(x) + \omega^2 \varphi(x) = 0$$

түрінде жазылады да, оның жалпы шешімі

$$\varphi(x) = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$$

болады. (201) шекаралық шарттарын пайдаланып, C_1, C_2 белгісіз коэффициенттерін анықтау үшін

$$\begin{pmatrix} 1 & -n\pi \\ (-1)^n & -n\pi(-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (204)$$

теңдеулер жүйесіне келеміз. Бұл теңдеулер жүйесінің $\omega^2 \sin \omega = 0$, яғни $\omega_n = n\pi, n = \pm 1, \pm 2, \dots$ немесе $\lambda_n = -\omega_n^2 = -(n\pi)^2, n \in \mathbb{N}$ болғанда, (204) жүйесінен

$$\begin{pmatrix} 1 & -n\pi \\ (-1)^n & -n\pi(-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

теңдеулер жүйесін аламыз. Бұдан $C_1 = n\pi, C_2 = C$ және $\varphi(x) = C(n\pi \cos n\pi x + C_2 \sin n\pi x)$, мұндағы, $C = \text{const}$.

Сонымен, бұл жағдайда $\lambda_n = -(n\pi)^2, n \in \mathbb{N}$ сипаттаушы сандарға

$$\varphi_n(x) = n\pi \cos n\pi x + \sin n\pi x, \quad n \in \mathbb{N}$$

меншікті функциялары сәйкес келеді.

Осы қарастырылған үш жағдайларды былай қорытындылауға болады: берілген симметриялық өзектің сипаттаушы сандары мен меншікті функцияларын табу мәселесінің шешімі

$$\lambda_0 = 1, \quad \varphi_{01} = e^x, \quad \varphi_{02} = e^{-x};$$

$$\lambda_n = -(n\pi)^2, \quad \varphi_n(x) = n\pi \cos n\pi x + \sin n\pi x, \quad n \in \mathbb{N}$$

болады.

Мына симметриялық өзекті интегралдық теңдеулерді кәдімгі дифференциалдық теңдеу үшін біртекті шеттік есептерге келтіру жолымен сипаттаушы сандар мен меншікті функцияларын табыңыз:

$$5.1. \quad K(x,s) = \begin{cases} (s-1)x, & 0 \leq x \leq s, \\ s(x-1), & s \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$5.2. \quad K(x,s) = \begin{cases} -x, & 0 \leq x \leq s, \\ -s, & s \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$5.3. \quad K(x,s) = \begin{cases} -x-1, & 0 \leq x \leq s, \\ -s-1, & s \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$5.4. \quad K(x,s) = \begin{cases} \cos s \sin x, & 0 \leq x \leq s, \\ \sin s \cos x, & s \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$5.5. \quad K(x,s) = \begin{cases} -e^{-s}chx, & 0 \leq x \leq s, \\ -chse^{-x}, & s \leq x \leq 2. \end{cases}$$

$$5.6. \quad K(x,s) = \frac{1}{2} \sin |x-s|, \quad 0 \leq x \leq s \leq \pi.$$

I. Егер симметриялық өзекті біртекті емес

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,s) \varphi(s) ds = f(x) \quad (205)$$

интегралдық теңдеуі беріліп, оның өзегі

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,s)|^2 dx ds < +\infty$$

шартын қанағаттандырса, онда бұл теңдеуді төмендегіше зерттеуге болады.

Мына

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots \quad (206)$$

сандары $K(x,s)$ өзегін сипаттаушы сандар тізбегі, ал

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots \quad (207)$$

сол сандарға сәйкес келетін меншікті функциялары болсын.

Егер (205) теңдеудегі λ параметрі сол теңдеудің сипаттаушы $\lambda_n, n=1,2,\dots$ сандарының ешқайсысымен сәйкес келмесе, онда ол теңдеудің шешімі жоғарыдағы 3⁰ - Фредгольм теоремасы бойынша жалғыз шешімі бар және ол теңдеу барлық $f(x)$ үшін шешіледі

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\lambda_n - \lambda} \varphi(x) \quad (208)$$

өрнекпен анықталады, мұндағы,

$$f_n = \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx, \quad n=1,2,\dots, \quad (209)$$

Ал егер λ параметрі әйтеуір бір r рангілі сипаттаушы санға сәйкес келсе, яғни

$$\lambda = \lambda_{m+1} = \lambda_{m+2} = \dots = \lambda_{m+r}$$

болса, онда (205) теңдеудің шешімі сол r рангілі меншікті функциялар $f(x)$ функцияға ортогонал болған жағдайда, яғни

$$\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx = 0, \quad n = m+1, m+2, \dots, m+r \quad (210)$$

шарттар орынды болғанда ғана болады. Бұл жағдайда (205) теңдеудің шексіз көп шешімі:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{n \neq m+1, \dots, m+r}^{\infty} \frac{f_n}{\lambda_n - \lambda} \varphi_n(x) + C_1 \varphi_{m+1}(x) + C_2 \varphi_{m+2}(x) + \dots + C_r \varphi_{m+r}(x)$$

өрнегімен анықталады, мұндағы, $C_1, C_2, \dots, C_r$ тұрақты шамалар.

Мысал, өзегі

$$K(x, s) = \begin{cases} \cos s \sin x, & 0 \leq x \leq s, \\ \sin s \cos x, & s \leq x \leq \pi \end{cases} \quad (211)$$

болатын

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^\pi K(x, s) ds = \frac{\pi}{4} - \sin \frac{x}{2} \quad (212)$$

интегралдық теңдеудің λ параметрінің әртүрлі мәндері үшін барлық шешімдерін табайық.

5.4-есепі бойынша (211) өзектің сипаттаушы сандары мен меншікті функциялары

$$\lambda_n = -1 + \left(\frac{2n+1}{2} \right)^2, \quad \varphi_n(x) = \sin \frac{2n+1}{2} x, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

болады, мұндағы, әрбір сипаттаушы сандар $r = 1$ рангілі, ал меншікті функциялар тізбегі өзара $[0, \pi]$ кесіндіде ортогонал, бірақ нормаланбаған. Ал нормаланған меншікті функциялар

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \frac{2n+1}{2} x, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

жоғарыдағы (212) өрнегі бойынша $f(x) = \frac{\pi}{4} - \sin \frac{x}{2}$ функциясы үшін

$$f_n = \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{4} - \sin \frac{x}{2} \right) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \frac{2n+1}{2} x dx = \begin{cases} 0, & n=0, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{2n+1}, & n \neq 0 \end{cases}$$

түрінде жазылады; сонымен $\lambda \neq \lambda_n, n=0,1,2,\dots$ болғанда, (212) интегралдық теңдеудің

$$\varphi(x) = \frac{\pi}{4} - \sin \frac{x}{2} + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n - \lambda} \cdot \frac{\sin \frac{2n+1}{2} \cdot x}{2n+1}$$

жалғыз шешімі, ал $\lambda = \lambda_0 = -\frac{3}{4}$ болғанда, $f(x) = \frac{\pi}{4} - \sin \frac{x}{2}$ функциясы $\varphi_0(x) = \sin \frac{x}{2}$ меншікті функцияға $[0, \pi]$ кесіндіде ортогонал болғандықтан

$$\varphi(x) = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} - \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{2n+1}{2} x}{n(n+1)(2n+1)} + C \sin \frac{x}{2}$$

түріндегі шексіз көп шешімдерінің жиыны болады, мұндағы, C – кез келген тұрақты шама.

Ал $\lambda = \lambda_n, n=1,2,\dots$ жағдайда теңдеудің шешімі болмайды.

Мына біртекті емес симметриялық өзекті интегралдық теңдеудің λ параметрінің әртүрлі мәндеріне сәйкес келетін барлық шешімдерін табыңыз.

$$5.7. \quad \varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x,s) \varphi(s) ds = 1, \quad K(x,s) = \begin{cases} (s-1)x, & 0 \leq x \leq s, \\ s(x-1), & s \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$5.8. \quad \varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x,s) \varphi(s) ds = \sin \pi x \cos \frac{\pi}{2} x, \quad K(x,s) = \begin{cases} -x, & 0 \leq x \leq s, \\ -s, & s \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$5.9. \quad \varphi(x) - \lambda \int_0^{\pi} K(x,s) \varphi(s) ds = x - \pi, \quad K(x,s) = \begin{cases} \sin s \cos x, & 0 \leq x \leq s, \\ \cos s \sin x, & s \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

$$5.10. \quad \varphi(x) - \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin|x-s| \varphi(s) ds = 1.$$

$$5.11. \quad \varphi(x) = \lambda \int_{-2}^2 |x| \varphi(s) ds + x^2.$$

§ 9.6. Фредгольмнің анықтауыштар әдісі

Егерде 2-текті Фредгольмнің интегралдық теңдеуі

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,s) \varphi(s) ds + f(x) \quad (213)$$

берілсе, онда оның шешімі

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, s; \lambda) f(s) ds \quad (214)$$

өрнегімен анықталады, мұндағы, $R(x, s; \lambda)$ – интегралдық теңдеудің $K(x, s)$ өзегінің резольвентасы.

Ал резольвента мероморфты функция болғандықтан, оны барлық жағдайда λ айнымалыға катысты бүтін функциялардың қатынасына тең деп қарастыруға болады. Бұл жағдайда резольвента полюстері теңдеудің өзегінің меншікті сандары x, s айнымалыларына тәуелсіз, сондықтан бұл бөлшектің бөлімі тек қана λ -ға тәуелді болады. Сонымен

$$R(x, s'; \lambda) = \frac{D(x, s; \lambda)}{D(\lambda)}, \quad (215)$$

мұндағы, $D(x,s;\lambda)$, $D(\lambda)$ жоғарыда ескертілгендей λ -ға катысты бүтін функциялар және $D(\lambda) \neq 0$, олар

$$D(x, s' \lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} B_n(x, s) \lambda^n, \quad (216)$$

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} C_n \lambda^n. \quad (217)$$

Бұл екі өрнектегі:

$$B_0(x,s) = K(x,s),$$
$$B_n(x,s) = \int \underbrace{\dots}_{n} \int_a^b \left| \begin{array}{c} K(x,s)K(x,s_1)...K(x,s_n) \\ K(s_1,s)K(s_1,s_1)...K(s_1,s_n) \\ \\ K(s_n,s)K(s_n,s_1)...K(s_n,s_n) \end{array} \right| ds_1 ds_2 ... ds_n,$$
$$C_n = \int \underbrace{\dots}_{n} \int_a^b \left| \begin{array}{c} K(s_1,s_1)K(s_1,s_2)...K(s_1,s_n) \\ K(s_2,s)K(s_2,s_2)...K(s_2,s_n) \\ \\ K(s_n,s_1)K(s_n,s_2)...K(s_n,s_n) \end{array} \right| ds_1 ds_2 ... ds_n. \quad (218)$$

- **Ескерту.** Бұлар теорияда толық белгіленген.

Ал, мұндағы, $D(x, s; \lambda)$ – Фредгольм миноры, $D(\lambda)$ – Фредгольм анықтауышы деп аталады.

Егер $\int_a^b \int_a^b K^2(x,s) ds dx < +\infty$ болса, онда (216), (217) қатарлары λ -ның барлық мәндерінде жинақты болады.

1 мысал. Өзегі $K(x,s) = xe^{-s}$ интегралдау шекаралары $a = 0, b = 1$ болатын интегралдық теңдеудің резольвентасын табу керек.

Шешуі:

$$\begin{aligned}
 B_0(x, s) &= K(x, s) = xe^{-s}, \\
 B_1(x, s) &= \int_0^1 \begin{vmatrix} xe^{-s} & xe^{-s_1} \\ s_1 e^{-s} & s_1 e^{-s_1} \end{vmatrix} ds_1 = 0, \\
 B_2(x, s) &= \int_0^1 \int_0^1 \begin{vmatrix} xe^{-s} & xe^{-s_1} & xe^{-s_2} \\ s_1 e^{-s} & s_1 e^{-s_1} & s_1 e^{-s_2} \\ s_2 e^{-s} & s_2 e^{-s_1} & s_2 e^{-s_2} \end{vmatrix} ds_1 ds_2 = 0, \\
 B_3(x, s) &= 0, \dots, B_n(x, s) = 0, \\
 C_1 &= \int_0^1 K(s_1, s_1) ds_1 = \int_0^1 s_1 e^{-s_1} ds_1 = 1 - \frac{2}{e}, \\
 C_2 &= \int_0^1 \int_0^1 \begin{vmatrix} s_1 e^{-s_1} & s_1 e^{-s_2} \\ s_2 e^{-s_1} & s_2 e^{-s_2} \end{vmatrix} ds_1 ds_2 = 0, \\
 C_3 &= 0, \dots, C_n = 0.
 \end{aligned}$$

Демек, $D(x, s; \lambda) = xe^{-s}$.

$$D(\lambda) = 1 - (1 - 2e^{-1})\lambda,$$

олай болса, $R(x, s; \lambda) = \frac{xe^{-s}}{(1 - 2e^{-1})\lambda}$.

Егер өзегі $K(x, s) = xe^{-s}$ болатын

$$\varphi(x) = 2 \int_0^1 xe^{-s} \varphi(s) ds + e^x, \quad \lambda = 2$$

Фредгольмнің 2-текті интегралын анықтауыш әдісімен шешу керек болса, онда жоғарыдағы резольвентаны пайдаланып, теңдеудің шешімін анықтаймыз

$$\varphi(x) = e^x + 2 \int_0^1 \frac{xe^{-s}}{1 - (1 - 2e^{-1})2} e^s ds = e^x + \frac{2x}{1 - (1 - 2e^{-1})}.$$

I-ескерту. Жоғарыдағы (218) өрнектерді бірнеше рет интегралдау қажет болатындықтан пайдалану қолайсыздық тудырады, сондықтан оның орнына

$$B_n(x, s) = C_n K(x, s) - n \int_a^b K(x, s_1) B_{n-1}(s_1, s) ds_1, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

мұндағы,

$$B_0(x, s) = K(x, s), \quad C_0 = 1,$$

$$C_n = \int_a^b B_{n-1}(x, x) dx, \quad n > 0$$

өрнегін пайдаланса, әлдеқайда қолайлы және

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \lambda^n, \quad A_n = \int_a^b K(x, x) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

өрнектерін де тиісті жерлеріне пайдаланған кейбір жағдайда тиімді.

2-ескерту. Кейбір жағдайда өзектері $K(x, s) = f_1(x) \cdot f_2(s)$ және

$$\int_a^b f_1(x)f_2(x)dx = A \text{ болатын } D(\lambda) = 1 - \lambda A, \quad D(x, s; \lambda) = f_1(x) \cdot f_2(s)$$

интегралдық теңдеудің шешімі

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{\lambda f_1(x)}{1 - \lambda A} \int_a^b f_1(s)f_2(s)ds$$

болады.

Фредгольмнің анықтауыштарын пайдаланып, мына өзектердің резольвенттарын табыңыз:

6.1. $K(x, s) = 2x - s, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq s \leq 1.$

6.2. $K(x, s) = x^2s - xs^2, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq s \leq 1.$

6.3. $K(x, s) = \sin x \cos ss, \quad 0 \leq x \leq 2\pi, \quad 0 \leq s \leq 2\pi.$

6.4. $K(x, s) = xs, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq s \leq 1.$

6.5. $K(x, s) = \sin x - \sin s, \quad 0 \leq x \leq 2\pi, \quad 0 \leq s \leq 2\pi.$

6.6. $K(x, s) = \cos x + \cos s, \quad 0 \leq x \leq 2\pi, \quad 0 \leq s \leq 2\pi.$

6.7. $K(x, s) = \sin 2x - \sin 2s, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq s \leq \pi.$

6.8. $K(x, s) = \sin x + \sin s, \quad 0 \leq x \leq 2\pi, \quad 0 \leq s \leq 2\pi.$

Енді жоғарыда берілген 1-ескертуге мысал келтірейік.

Өзегі $K(x, s) = x - s$ айнымалар $0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq s \leq 1$ өзгерген жағдайда:

$$C_0 = 1, \quad C_1 = \int_0^1 B_0(s, s)ds,$$

$$B_1 = -\int_0^1 B_0(x - s_1)(s_1 - s)ds_1 = -\int_0^1 (xs_1 - s_1^2 - xs + s_1s)ds_1 = -\left(\frac{x+s}{2} - xs - \frac{1}{3}\right),$$

$$C_2 = -\int_0^1 \left(s - s^2 - \frac{1}{3}\right)ds = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{6}(x - s) + 2\int_0^1 (x - s_1)\left(\frac{s_1 + s}{2} - s_1s - \frac{1}{3}\right)ds_1 =$$

$$= \frac{1}{6}(x - s) + 2\int_0^1 \left(\frac{xs_1}{2} + \frac{xs}{2} - xs_1s - \frac{x}{3} - \frac{s_1^2}{2} - \frac{s_1s}{2} + s_1^2s + \frac{s_1}{3}\right)ds_1 = 0,$$

демек,

$$D(\lambda) = 1 - \frac{\lambda^2}{6}, \quad D(x, s; \lambda) = x - s + 1 + \lambda\left(\frac{x+3}{2} - xs - \frac{1}{3}\right),$$

$$R(x, s; \lambda) = \frac{x - s + \lambda\left(\frac{x+3}{2} - xs - \frac{1}{3}\right)}{1 - \frac{\lambda^2}{6}}.$$

Рекурренттік қатыстарды пайдаланып, мына өзектерге сәйкес резольвенттерді табыңыз:

6.9. $K(x, s) = 3xs + 1, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq s \leq 1.$

6.10. $K(x, s) = x(4s - x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq s \leq 1.$

6.11. $K(x, s) = e^{2(x+s)}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq s \leq 1.$

6.12. $K(x, s) = \cos(x + s), \quad 0 \leq x \leq 2\pi, \quad 0 \leq s \leq 2\pi.$

10. ИНТЕГРАЛДЫҚ ТЕНДЕУЛЕРДІ ЖУЫҚТАУ ӘДІСІМЕН ШЕШУ

Интегралдық теңдеулерді сандық жуықтау әдісімен шешудің әртүрлі жолдары бар. Ол әдістерді

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds = f(x) \quad (219)$$

Фредгольннің 2-текті интегралдық теңдеуін сандық жуықтау әдісімен шешу арқылы түсіндірейік.

§ 10.1. Шектелген қосылғыштар әдісі

Бұл әдіс анықталған интегралды

$$\int_a^b F(x)dx = \sum_{i=1}^n M_i F(x_i) + R_F \quad (220)$$

квадраттық функционалды жуықтап есептеуге негізделген, мұндағы, $M_i (i=1,2,\dots,n)$ – $[a,b]$ кесіндідегі $x_i (i=1,2,\dots,n)$ нүктелерінде тұрақты $F(x)$ функцияға тәуелсіз коэффициенттер, ал R_F - пайдаланып отырған әдіске байланысты болатын қатенің шамасы.

Бірдей қашықтықтағы $x_i = a + (i-1)h, h = \frac{b-a}{n}, (i=1,2,\dots,n)$ нүктелері үшін (220)

функционалдағы M_i еселіктері мынадай мағыналы:

1) тіктөртбұрыштың функционалы үшін:

$$M_i = h, i=1,2,\dots,n-1, A_n = 0;$$

2) трапециялардың жалпы функционалы үшін:

$$A = A_n - \frac{h}{2}, A_2 = A_3 = \dots = A_{n-1} = h;$$

3) Симпсонның $n = 2m + 1$ болғандағы жалпылама функционалы үшін:

$$A_1 = A_{2m+1} = \frac{h}{3}, A_2 = A_4 = \dots = A_{2m} = \frac{4h}{3},$$

$$A_3 = A_5 = \dots = A_{2m-1} = \frac{2h}{3}.$$

Мынадай

$$\varphi(x_i) = \varphi_i, K(x_i, x_j) = K_{ij}, f(x_i) = f_i, i, j = 1, 2, \dots, n$$

белгілеулерін енгізіп, (220) функционалын пайдалана отырып, (219) теңдеуінен әрбір x_i нүктедегі белгісіз φ_i функциялары үшін

$$\tilde{\varphi}_i - \lambda \sum_{j=1}^n M_{ij} K_{ij} \tilde{\varphi}_j = f_i, i = 1, 2, \dots, n \tag{221}$$

алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз. Бұл (221) теңдеулер жүйесі алгебрадағы белгілі әдістердің біреуімен шешіледі.

Міне, осы (221) жүйесінен $\tilde{\varphi}_i$ функциясын тауып, $\varphi(x)$ үшін жуық аналитикалық

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^n M_{ij} K(x, x_j) \tilde{\varphi}_j$$

шешімін анықтаймыз.

Мысал. $n = 3$ үшін Симпсонның квадраттық функционалын пайдаланып,

$$\varphi(x) - 0,5 \int_0^1 x e^s \varphi(s) ds = e^{-x}$$

интегралдық теңдеуін шектелген қосылғыштар әдісімен шешейік.

Шешуі. Бірдей қашықтықтағы $x_1 = 0, x_2 = 0,5, x_3 = 1$ нүктелерін белгілеп алайық. Теңдеудегі $K(x, s) = x e^{-s}$ өзегі мен $f(x) = e^{-x}$ белгілі функциясының (x_i, s_j) және x_i нүктедегі мәндері төмендегі кестеде көрсетілген:

$K_{ij} = K(x_i, s_j)$

$s_j \backslash x_i$	0	0,5	1
0	0	0,5	1
0,5	0	0,8244	1,6487
1	0	1,3592	2,7183

$f_i = f(x_i)$

x_i	0	0,5	1
f_i	1	0,6065	0,3679

Бұл мысал үшін Симпсонның квадраттық функционалы

$$\int_a^b F(x) dx \cong \frac{1}{6} [F(0) + 4F(0,5) + F(1)],$$

себебі $h = \frac{1}{2}, A_1 = \frac{h}{3} = \frac{1}{6}, A_2 = \frac{4h}{3} = \frac{2}{3}, A_3 = \frac{h}{3} = \frac{1}{6}$.

Енді $\varphi(x)$ шешімінің $\tilde{\varphi}_i, i = 1, 2, 3$ мәндерін (221) функционалы бойынша табу үшін кестеде берілген K_{ij}, f_i мәндерін пайдалансақ, онда

$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 - \frac{0,5}{6}(0,5y_1 + 3,2976y_2 + 1,3592y_3) = 0,6065, \\ y_3 - \frac{0,5}{6}(y_1 + 6,5948y_2 + 2,7183y_3) = 0,3679 \end{cases}$$

алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз. Осы теңдеулер жүйесінен

$$\tilde{\varphi}_1 = 1, \tilde{\varphi}_2 = 1,1079, \tilde{\varphi}_3 = 1,3706.$$

Демек, интегралдық теңдеудің жуық шешімі

$$\varphi(x) = e^{-x} + 1,003x$$

болады.

- **Ескерту.** Осы талдаған әдісімізді

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds = f(x), a \leq x \leq b$$

Вольтерраның 2-текті интегралдық теңдеуіне де қолдануға болады, бірақ мұнда теңдеудің өзегі $K_{ij} = 0, j > i$.

Себебі өзегі $K(x,s)$ болатын Вольтерра теңдеуін

$$K^*(x,s) = \begin{cases} K(x,s), a \leq s \leq x, \\ 0, x < s \end{cases}$$

өзекті Фредгольмнің 2-текті теңдеуіне келтіріледі.

§10.2. Моменттер әдісі

Бұл әдіс бойынша интегралдық теңдеудің жуық $\tilde{\varphi}(x)$ шешімін $f(x)$ функциясымен $[a,b]$ кесіндіде $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$, т.с.с. сызықтық тәуелсіз функциялардың сызықтық комбинациясының қосындысы, яғни

$$\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}_n(x) = f(x) + \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(x) \quad (222)$$

түрінде іздейді, мұндағы, $C_1, C_2, \dots, C_n$ - белгісіз тұрақты шамалар. (222) жуық шешімін (219) теңдеуге қойып,

$$R[\widetilde{\varphi}(x)] = \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(x) - \lambda \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(x) - \lambda \int_a^b K(x,s) f(s) ds \quad (223)$$

айырымын аламыз, мұндағы,

$$\psi_i(x) = \int_a^b K(x,s) \varphi_i(s) ds, i = 1, 2, \dots, n.$$

Моменттер әдісі бойынша $C_1, C_2, \dots, C_n$ белгісіз еселіктері айырымдар мен $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ функциялардың әрқайсысына функционалдық шарттарынан пайда болатын теңдеулер жүйесінен

$$\int_a^b R[\widetilde{\varphi}_n(x)] \varphi_i(x) dx = 0, i = 1, 2, \dots, n$$

анықталады. Бұл соңғы жүйені (223) функционалына пайдалансақ,

$$\sum_{i=1}^n C_i (\alpha_{ij} - \lambda \beta_{ij}) = \gamma_i \lambda, i = 1, 2, \dots, n \quad (224)$$

теңдеулер жүйесін аламыз, мұнда,

$$\alpha_{ij} = \int_a^b \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx, \quad \beta_{ij} = \int_a^b dx \int_a^b K(x,s) \varphi_i(s) \varphi_j(s) ds,$$

$$\gamma_i = \int_a^b dx \int_a^b K(x,s) f(s) \varphi_i(s) ds.$$

Егер (224) теңдеулер жүйесінің $D(\lambda) = \det(\alpha_{ij} - \lambda \beta_{ij})$ анықтауышы нөлге тең болмаса, онда $C_1, C_2, \dots, C_n$ коэффициенттері бірімді анықталады. Оларды (222) өрнегіне қойып, жоғарыда берілген (219) интегралдық теңдеудің жуық шешімін аламыз.

Мысалы, мына

$$\varphi(x) - \int_0^1 K(x,s) \varphi(s) ds = 1$$

теңдеудің жуық шешімін табайық, оның өзегі

$$K(x,s) = \begin{cases} (s-1)x, & 0 \leq x \leq s, \\ s(x-1), & s \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Өзектің мәнін теңдеуге қойсақ,

$$\varphi(x) - \left(\int_0^x s(x-1)\varphi(s)ds + \int_x^1 (s-1)x\varphi(s)ds \right) = 1.$$

Егер жуық шешімді $\tilde{\varphi}(x) = \bar{\varphi}(x) = 1 + C_1x + C_2x^2$ деп белгілесек, онда айырым мынаған тең болады:

$$R[\bar{\varphi}_2(x)] = C_1x + C_2x^2 - \left[(x-1) \left(C_1 \frac{x^3}{3} + C_2 \frac{x^4}{4} \right) + x \left(-\frac{C_1}{6} \right) - C_1 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right) - \frac{C_2}{12} + C_2 \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} \right) \right] - \frac{(x-1)x^2}{2} + \frac{x(x-1)^2}{2}.$$

Ал $R[\bar{\varphi}_2(x)]$ айырымның x және x^2 функцияларға функционалдық шартынан

$$\begin{cases} \int_0^1 R[\bar{\varphi}_2(x)]x dx = 0, \\ \int_0^1 R[\bar{\varphi}_2(x)]x^2 dx = 0. \end{cases}$$

теңдеулер жүйесін аламыз. Бұл жүйедегі интегралды есептеп,

$$\begin{cases} 0,3555C_1 + 0,3146C_2 = -0,1167, \\ 0,2638C_1 + 0,2417C_2 = 0,025. \end{cases}$$

түрінде жазып, осы жүйенің $C_1 = 0,027, C_2 = -0,029$ шешімін табамыз. Сонда берілген интегралдық теңдеудің жуық шешімі

$$\varphi(x) = 1 + 0,027x - 0,029x^2$$

болады.

• **Ескерту.** Біз бұл келтірілген мысалда жуық шешімдердің дәл шешімнен айырмашылығын бағалау мәселесімен шұғылданбадық. Қажет болған жағдайда [6] оқулықты ұсынамыз.

Жоғарыда келтірілген әдістердің ыңғайлысын пайдаланып мына төмендегі интегралдық теңдеулердің жуық шешімдерін табыңыз:

$$1.1. \quad \varphi(x) - \int_0^1 e^{\arcsin \frac{xs}{2}} \varphi(s) ds = \operatorname{tg} x.$$

$$1.2. \quad \varphi(x) - \frac{1}{3} \int_0^1 (x^2 + \sin xs) \varphi(s) ds = \cos 2x.$$

$$1.3. \quad \varphi(x) + \frac{1}{4} \int_0^1 x \ln(x^2 + 10s^2 + 3) \varphi(s) ds = x^2 + 3x.$$

$$\begin{aligned}
1.4. \quad \varphi(x) - \int_0^1 (1 + \sin e^{xs}) \varphi(s) ds &= \frac{1}{8}x + 1. \\
1.5. \quad \varphi(x) + 5 \int_0^1 e^{xs+s^2} \varphi(s) ds &= \ln(1+x). \\
1.6. \quad \varphi(x) + \int_0^1 (x \sin s - \sqrt{s}) \varphi(s) ds &= \cos 3x. \\
1.7. \quad \varphi(x) - \int_0^1 (xs + x^2 \cos s) \varphi(s) ds &= x - 2. \\
1.8. \quad \varphi(x) - 4 \int_0^1 x e^{xs+s^2} \varphi(s) ds &= e^{2x} + 8. \\
1.9. \quad \varphi(x) - \int_0^x (x - \sin xs) \varphi(s) ds &= \sin x, x \in [0,1]. \\
1.10. \quad \varphi(x) - \int_0^x (1 + x^2 s - e^{xs}) \varphi(s) ds &= e^{2x} + x, x \in [0,1].
\end{aligned}$$

§ 10.3. Бубнов-Галеркин әдісі

Біртекті емес Фредгольмнің

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,s) \varphi(s) ds \quad (225)$$

2-текті интегралдық теңдеудің Бубнов-Галеркин әдісімен жуық шешімін табу үшін $L_2[a,b]$ кеңістігінде толық сызықты тәуелсіз $\{U_n(x)\}$ функциялар тізбегін таңдап алып, жуық шешімін

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k u_k(x) \quad (226)$$

қосынды түрінде іздейді, ал мұндағы, $a_1, a_2, \dots, a_n$ белгісіз коэффициенттерін

$$(\varphi_n(x), u_k(x)) = (f(x), u_k(x)) + \lambda \left(\int_0^1 K(x,s) \varphi_n(s) ds, u_k(x) \right), k = 1, 2, \dots, n \quad (227)$$

алгебралық теңдеулер жүйесінін анықтайды. Теңдеудегі $(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$ және $\varphi_n(x)$ орнына (226) қосындыны алу керек.

Егер (225) теңдеудегі λ параметрі сипаттаушы сан болмаса, онда n жеткілікті үлкен шама болғанда, яғни $n \rightarrow \infty$ жағдайда (226) қосындысы $L_2[a,b]$ кеңістігіндегі өлшем бойынша (225) интегралдық теңдеудің дәл $\varphi(x)$ шешіміне жинақты болады. Теңдеуді Бубнов-Галеркин әдісімен шешейік.

Мысал.

$$\varphi(x) = x + \int_{-1}^1 xs \varphi(s) ds. \quad (228)$$

Шешуі: $[-1,1]$ кесіндісіндегі толық $P_n(x), n = 0,1,2,\dots$ Лежандр полиномдарын таңдап алып, теңдеудің жуық шешімін $\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k P_k(x), n = 1,2,3$ косынды түрінде қарастырайық, яғни ($n=3$ үшін) $\varphi_3(x) = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot \frac{3x^2-1}{2}$ түрінде іздейміз. Мұны (227) өрнекке қосайық

$$a_1 + a_2 x + a_3 \frac{3x^2-1}{2} = x + \int_{-1}^1 x s \left(a_1 + a_2 s + a_3 \frac{3s^2-1}{2} \right) ds$$

немесе

$$a_1 + a_2 x + a_3 \frac{3x^2-1}{2} = x + x \cdot \frac{2}{3} a_2 \quad (229)$$

Бұл (229) өрнегін біртіндеп, $1, x, \frac{3x^2-1}{2}$ функцияларына көбейтіп, x айнымалы бойынша -1 ден 1 -ге дейін интегралдап, сонда

$$\begin{cases} 2a_1 = 0, \\ \frac{2}{3}a_2 + \frac{9}{4}a_1, \\ \frac{2}{3}a_3 = 0. \end{cases}$$

жүйені аламыз. Осы соңғы жүйеден белгісіз $a_1 = 0, a_2 = 3, a_3 = 0$ айқындаймыз, демек, $\varphi_3(x) = 3x$. Ал бұл функция теңдеудің дәл шешімі болады.

Бубнов-Галекиннің жуықтап шешу әдісімен төмендегі интегралдық теңдеуді шешіңіз:

$$3.1. \varphi(x) = \int_{-1}^1 (xs + x^2) \varphi(s) ds.$$

$$3.2. \varphi(x) = \int_{-1}^1 (xs^2 - x) \varphi(s) ds + 1 + \frac{4}{3}x.$$

$$3.3. \varphi(x) = \int_{-1}^1 x^2 e^{xs} \varphi(s) ds + 1 - x(e - e^{-x}).$$

§ 10.4. Ритца әдісі

Фредгольмнің 1-текті симметриялық өзекті

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,s) \varphi(s) ds \quad (230)$$

теңдеуінің Ритца әдісімен меншікті сандары мен меншікті функцияларын анықтайық, мұндағы, $K(x,s) = K(s,x)$ -симметриялық өзек.

$L_2[a,b]$ кеңістігінде $\{\psi_n(x)\}$ толық, сызықтық тәуелсіз координаталық функциялар жүйесін таңдап аламыз да, (230) теңдеуінің шешімін

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k \psi_k(x) \quad (231)$$

түрінде жазамыз, мұндағы, $a_1, a_2, \dots, a_n$ коэффициенттерін $\|\varphi_n\| = 1$ шартын қанағаттандыратындай етіп анықтаймыз; сонымен қатар $(K\varphi_n, \varphi_n)$ квадраттық форманың тұрақтандырылған мәнін табамыз.

Нәтижеде a_k, σ /Лагранж/ коэффициенттерін анықтайтын біртекті алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\sum_{k=1}^n \{(K\psi_j, \psi_k) - \sigma(\psi_j, \psi_k)\} a_k = 0, j = 1, 2, \dots, n. \quad (232)$$

Бұл теңдеулер жүйесінің нөлдік шешімі болуы үшін

$$\begin{vmatrix} (K\psi_1, \psi_1) - \sigma(\psi_1, \psi_1) & \dots & (K\psi_1, \psi_n) - \sigma(\psi_1, \psi_n) \\ (K\psi_2, \psi_1) - \sigma(\psi_2, \psi_1) & \dots & (K\psi_2, \psi_n) - \sigma(\psi_2, \psi_n) \\ \vdots & & \vdots \\ (K\psi_n, \psi_1) - \sigma(\psi_n, \psi_1) & \dots & (K\psi_n, \psi_n) - \sigma(\psi_n, \psi_n) \end{vmatrix} = 0 \quad (233)$$

орындалуы қажетті. Міне, осы анықтауыштан пайда болған көпмүшенің түбірлері $K(x, s)$ өзектің меншікті мәндерінің жуық шамаларын анықтайды. Осы (233) өрнегінен σ -ны тауып, оның сипаттаушы мәнін (232) теңдеуге қойсақ, $a_1, a_2, \dots, a_n$ коэффициенттердің нөлге тең емес жуық мәндерін (231) өрнегіне қойсақ, сонда меншікті функцияның жуық мәнін табамыз.

Мысал. Мына $K(x, s) = xs$ өзектің $a = 0, b = 1$ шекаралық жағдайдағы меншікті сандары мен меншікті функцияларын Ритца әдісімен анықтайық.

Шешуі: $[0, 1]$ кесіндіде Ритца әдісінің шартын қанағаттандыратын $\psi_n(x)$ координаталық функциялар үшін $\psi_n(x) = P_n(2x - 1)$ Лежандр полиномдарын алып, (231) өрнекке

$$\psi_2(x) = a_1 P_0(2x - 1) + a_2 P_1(2x - 1),$$

яғни $n = 2$ үшін жазсақ,

$$\psi_1(x) = P_0(2x - 1) = 1, \quad \psi_2(x) = P_1(2x - 1) = 2x - 1,$$

бұлардан:

$$(\psi_1, \psi_1) = \int_0^1 dx = 1, (\psi_1, \psi_2) = \int_0^1 (2x - 1) dx = 1,$$

$$(\psi_2, \psi_2) = \int_0^1 (2x-1)^2 dx = \frac{1}{3},$$

$$(K\psi_1, \psi_1) = \int_0^1 \left(\int_0^1 K(x,s) \psi_2(s) ds \right) \psi_1(x) dx = \int_0^1 \int_0^1 xs dx ds = \frac{1}{4},$$

$$(K\psi_1, \psi_2) = \int_0^1 \int_0^1 xs(2x-1) dx ds = \frac{1}{12},$$

$$(K\psi_2, \psi_2) = \int_0^1 \int_0^1 xs(2s-1)(2x-1) dx ds = \frac{1}{36},$$

ал (233) жүйесі бойынша

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{4} - \sigma & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{36} - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

немесе $\sigma^2 - \sigma \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4} \right) = 0 \Rightarrow \sigma_1 = 0, \sigma_2 = \frac{1}{3}.$

Бұл түбірлердің ең үлкені $\sigma_2 = \frac{1}{3}$, ендеше, ең кіші сипаттаушы саны $\lambda = \frac{1}{\sigma^2} = 3$ болады. Бұл $\sigma = \frac{1}{3}$ шамасын (232) жүйеге қойсақ, $a_1 = a_2$, ал одан $\varphi(x) = 2x$ меншікті функциясын анықтаймыз.

Ритца әдісі бойынша мына өзектердің ($a=0, b=1$ үшін) ең кіші сипаттаушы сандарын анықтаймыз:

4.1. $K(x,s) = x^2 s^2.$

4.2. $K(x,s) = \begin{cases} s, & x \geq s, \\ x, & x < s. \end{cases}$

4.3. $K(x,s) = \begin{cases} \frac{1}{2}x(2-s), & x \geq s, \\ \frac{1}{2}s(2-x), & x < s. \end{cases}$

ЖАУАПТАРЫ

8-тарау

- 0.1. СЫЗЫҚТЫҚ емес, біртекті емес.
- 0.2. СЫЗЫҚТЫҚ емес, біртекті емес.
- 0.3. СЫЗЫҚТЫ, біртекті емес.
- 0.4. СЫЗЫҚТЫҚ емес, біртекті.
- 0.5. СЫЗЫҚТЫҚ, біртекті емес.
- 0.6. СЫЗЫҚТЫҚ, біртекті емес.
- 0.7. СЫЗЫҚТЫҚ емес, біртекті.
- 0.8. СЫЗЫҚТЫҚ, біртекті емес.
- 0.9. СЫЗЫҚТЫҚ емес, біртекті емес.
- 0.10. СЫЗЫҚТЫҚ емес, біртекті емес, 1 типті.
- 0.11. СЫЗЫҚТЫҚ, біртекті емес, 2 типті.
- 0.12. СЫЗЫҚТЫҚ, біртекті емес, 2 типті.
- 0.13. СЫЗЫҚТЫҚ, біртекті.
- 0.14. СЫЗЫҚТЫҚ, біртекті емес.
- 0.15. СЫЗЫҚТЫҚ, біртекті.

- 1.1. Фредгольмдік емес.
- 1.2. Фредгольмдік.
- 1.3. Фредгольмдік.
- 1.4. Фредгольмдік емес.
- 1.5. Фредгольмдік емес.
- 1.6. Фредгольмдік.
- 1.7. Фредгольмдік.
- 1.8. Фредгольмдік емес.
- 1.9. Фредгольмдік.
- 1.10. Фредгольмдік емес.
- 1.11. Фредгольмдік.

$$2.1. \varphi(x) = e^x - 2x - \int_0^x 2x\varphi(s)ds.$$

$$2.2. \varphi(x) = 2x - 9 + \int_0^x (2 - x + s)\varphi(s)ds.$$

$$2.3. \varphi(x) = e^x(x-1) - \sin x + x + \int_0^x [\sin x - e^x(x-s)]\varphi(s)ds.$$

$$2.4. \varphi(x) = e^x - x - \frac{1}{2} \int_0^x x(x-s)^2 \varphi(s)ds.$$

$$2.5. \varphi(x) = \frac{x^3}{6} - x - \int_0^x \left[x - s - \frac{(x-s)^3}{6} \right] \varphi(s)ds.$$

$$2.6. \varphi(x) = -\int_0^x x\varphi(s)ds + 1.$$

$$\begin{aligned}
2.7. \quad \varphi(x) &= -\int_0^x x^2(x-s)\varphi(s)ds + 4x. \\
2.8. \quad \varphi(x) &= 2\int_0^x (x^2 - s^2)\varphi(s)ds + 4x. \\
2.2.1. \quad Y(x) &= \lambda \int_0^1 G(x, \xi)Y(\xi)d\xi + e^x - ex + x - 1, \quad G(x, \xi) = \begin{cases} (\xi-1)x, 0 \leq x \leq \xi, \\ (x-1)\xi, \xi \leq x \leq 1. \end{cases} \\
2.2.2. \quad Y(x) &= \lambda \int_0^1 G(x, \xi)Y(\xi)d\xi + \frac{x^2}{24}(x^2 - 4x + 6), \quad G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{x^2}{6}(3\xi - x), 0 \leq x \leq \xi, \\ \frac{\xi^2}{6}(3x - \xi), \xi \leq x \leq 4. \end{cases} \\
2.2.3. \quad Y(x) &= e^x - \lambda \int_0^1 G(x, \xi)Y(\xi)d\xi, \quad G(x, \xi) = \begin{cases} (1+x)\xi, 0 \leq x \leq \xi, \\ (1+\xi)x, \xi \leq x \leq 1. \end{cases} \\
2.9. \quad \varphi(x) &= \frac{1}{x+1} \left(\frac{3}{2}x^2 + x \right). \quad 2.10. \quad \varphi(x) = \frac{1}{x} - 1. \quad 2.11. \quad \varphi(x) = \frac{x^4}{12} + x^2. \\
2.12. \quad \varphi(x) &= \frac{x^2}{2} + 3. \quad 2.13. \quad \varphi(x) = e^x(x+1). \quad 2.14. \quad \varphi(x) = e^{\frac{x^3}{2}}. \\
2.15. \quad \varphi(x) &= \frac{1}{1+x^2} + \arg \operatorname{tg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \quad 2.16. \quad \varphi(x) = \cos x e^{(x+\sin x)}. \\
2.17. \quad \varphi(x) &= 2e^x - 2^{\cos x + 5 \sin x}. \quad 2.18. \quad \varphi(x) = -e^{-x}. \\
2.19. \quad \varphi(x) &= \frac{1}{6} \left(e^x + 3 \cos x + 3 \sin x - 4e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x \right). \\
2.20. \quad \varphi(x) &= 1. \quad 2.21. \quad \varphi(x) = xchx. \\
2.22. \quad \varphi(x) &= \frac{1}{4}e^x + \frac{1}{4}e^{-x} \left(\frac{1}{\sqrt{7}} \sin \frac{\sqrt{7}}{2} x + 3 \cos \frac{\sqrt{7}}{2} x \right). \\
3.1. \quad \varphi(x) &= e^x. \quad 3.2. \quad \varphi(x) = x. \quad 3.3. \quad \varphi(x) = 1. \\
3.4. \quad \varphi(x) &= 1 + x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = 1 + xe^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x e^{-\frac{s^2}{2}} ds. \quad 3.5. \quad \varphi(x) = e^{\frac{x^2}{2}}. \quad 3.6. \quad \varphi(x) = e^{\frac{x^{p+1}}{p+1}}. \\
3.7. \quad \varphi(x) &= \sin x. \quad 3.8. \quad \varphi(x) = chx. \quad 3.9. \quad \varphi(x) = (2e)^x. \quad 3.10. \quad \varphi(x) = (1+x^2)e^{-\frac{x}{2}}. \\
4.1. \quad e^{\lambda(s-x)}. \quad 4.2. \quad se^{\frac{\lambda}{2}(x^2-s^2)}. \quad 4.3. \quad x^2e^{\frac{\lambda}{3}(x^3-s^3)}. \quad 4.4. \quad xse^{\frac{\lambda}{3}(x^2-s^2)}. \\
4.5. \quad xs^2e^{\frac{\lambda}{4}(x^4-s^4)}. \\
4.6. \quad e^{(\lambda+1)(x-s)}. \quad 4.7. \quad 2^{shx-shs} \cdot e^{\lambda(x-s)}. \quad 4.8. \quad \frac{1+x^2}{1+s^2} e^{\lambda(x-s)}. \quad 4.9. \quad \frac{s^2-s+1}{x^2-x+1} e^{\lambda(x-s)}. \\
4.10. \quad \frac{chx}{chs} e^{\lambda(x-s)}. \quad 4.11. \quad e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad 4.12. \quad e^{\frac{x^3}{3}}. \quad 4.13. \quad \frac{1}{5}e^{3x} - \frac{1}{5}\cos x + \frac{2}{5}\sin x. \\
4.14. \quad e^{xchc}. \quad 4.15. \quad \frac{e^x}{1+x^2}. \quad 4.16. \quad e^x(x-1)+1. \quad 5.1. \quad e^x(x-1)+1. \\
5.2. \quad chx-1. \quad 5.3. \quad e^{2x}-e^2. \quad 5.4. \quad \frac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{x}{2}}sh\frac{\sqrt{3}}{2}x. \quad 5.5. \quad 2e^x-x+1. \quad 5.6. \quad 2\sin x-x.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5.7. & \frac{1}{3} \left[e^x - 2e^{-x} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \right] & 5.8. & \frac{1}{4} [e^{2x}(2x+3)+1] \\
5.9. & \frac{1}{3} (4 - \cos \sqrt{3}x) & 5.10. & 1. & 5.11. & 2 - e^{-x}. & 5.12. & chx + \cos x. \\
5.13. & e^{-x} \left(1 + \frac{x^2}{2} \right) & 5.14. & \frac{1}{5} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(1 + 4ch \frac{\sqrt{5}}{2} x \right) \\
5.15. & 2 - \cos \frac{\sqrt{2}}{2} x + \sqrt{2} \sin \frac{\sqrt{2}}{2} x. \\
6.1. & e^x. & 6.2. & x - \frac{x^2}{2}. & 6.3. & 1 - x \ln 3. & 6.4. & 1. \\
6.5. & x. & 6.6. & 3. & 6.7. & \text{Шешімі жоқ.} & 6.8. & e^x \left(\frac{1}{2} - \sin x \right). & 6.9. & xe^{x^2}. \\
6.10. & 3(2x-1). & 6.11. & chx. & 6.12. & x^2 \left(6 + \frac{1}{2} x^2 \right). & 6.13. & 2 \sin x. & 6.14. & 2 \cos x - 1. \\
6.15. & e^2 \left(1 + \frac{1}{2} x^2 \right). \\
7.1. & \varphi(x) = e^{-x} - xe^{-x}. & 7.2. & \varphi(x) = C + 2e^{-x}. & 7.3. & \varphi(x) = \cos x - \sin x. \\
7.4. & \varphi(x) = \frac{a}{a-1} - \frac{1}{a-1} e^{(a-1)x}.
\end{aligned}$$

9-тарау

$$\begin{aligned}
1.1. & 3x. & 1.2. & \frac{2}{3}. & 1.3. & 1-x. & 1.4. & 4 \sin x. & 1.5. & \frac{2}{3} \cos x. \\
1.6. & R(x, s; \lambda) = \frac{1}{1 - \pi \lambda}, \varphi(x) = \sin x. \\
1.7. & R(x, s; \lambda) = 2^{x+1} \frac{2 \ln 2}{2 \ln 2 - 3\lambda}, \varphi(x) = \frac{2 \ln 2 - 1}{\ln 2} 2^{x-1} + x. \\
1.8. & R(x, s; \lambda) = x \sin 2\pi s, \varphi(x) = \cos 2\pi x. & 1.9. & R(x, s; \lambda) = \frac{xe^s}{1-\lambda}, \varphi(x) = e^{-x} + x. \\
1.10. & R(x, s; \lambda) = \frac{2}{2-\lambda} \sin x \cos s, \varphi(x) = 1 + 2 \sin x. \\
2.1. & \sin x + \cos x. & 2.2. & \text{Шешімі жоқ.} & 2.3. & x + C(1-x^2) & 2.4. & x. \\
2.5. & \cos^2 x + \frac{1}{2(2-\ln 2)}. & 2.6. & Cx. & 2.7. & 0. & 2.8. & \cos 2\pi x. & 2.9. & x + \frac{1}{2}. \\
2.10. & C \left(\frac{5}{2} x + x^2 \right). \\
3.1. & \lambda = \frac{6}{7}, \varphi(x) = C(1+2x). & 3.2. & \lambda = \frac{3}{2}, \varphi(x) = C(1-x^2) \\
3.3. & \lambda = 1, \varphi(x) = C|x|. & 3.4. & \lambda = \frac{1}{\pi}, \varphi(x) = Cx. & 3.5. & \lambda = \frac{2}{\pi}, \varphi(x) = C \cos x. \\
3.6. & \mu_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \varphi_{1,2}(x) = C(\sqrt{3}x \pm 1) \\
3.7. & \mu_{1,2} = 1 \pm \sqrt{\frac{3}{2}(e-1)}, \varphi_{1,2}(x) = C\sqrt{\frac{3}{2}(e-1)} \pm 1.
\end{aligned}$$

$$3.8. \lambda = 2\pi, \varphi(x) = C. \quad 3.9. \lambda_{1,2} = \pm \frac{2}{\pi}, \varphi_{1,2}(x) = C(\sin x \pm \cos x).$$

$$3.10. \lambda = \frac{2}{\pi}, \varphi(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

$$4.1. \lambda \neq \frac{6}{5}, \varphi(x) = x^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{7\lambda}{6-5\lambda}, \text{ ал } \lambda = \frac{6}{5} \text{ болғанда, шешімі болмайды.}$$

$$4.2. \lambda \neq 2, \varphi(x) = \sin 2\pi x, \text{ ал } \lambda = 2, \varphi(x) = \sin 2\pi x + Cx.$$

$$4.3. \lambda \neq \frac{6}{7}, \varphi(x) = 1 - \frac{3}{2}x, \text{ ал } \lambda = \frac{6}{7}, \varphi(x) = 1 - \frac{3}{2}x + C(1+2x).$$

$$4.4. \lambda \neq -2\pi, \varphi(x) = \frac{2\pi}{2\pi + \lambda}, \text{ ал } \lambda = -2\pi \text{ болғанда, шешімі болмайды.}$$

$$4.5. \varphi(x) = \operatorname{ctg} x + \frac{\pi}{2}, \lambda \in R^1. \quad 4.6. \lambda = 1 \text{ болғанда, } \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\pi^2 \lambda}{8(1-\lambda)}.$$

$$4.7. \lambda \in R^1, \varphi(x) = \cos x + \frac{\pi \lambda}{2} \sin x.$$

$$4.8. \lambda \neq \frac{1}{2} \quad \lambda \neq \frac{3}{2} \text{ болғанда, } \varphi(x) = \frac{2}{3} \left[\sin \pi x + \frac{\frac{2\lambda x}{1 - \frac{2}{3}\lambda}}{\frac{\pi}{1 - \frac{2}{3}\lambda}} \right], \text{ ал } \lambda = \frac{1}{2} \text{ болғанда,}$$

$$\varphi(x) = \sin \pi x + \frac{2}{2\pi} x, \lambda = \frac{3}{2} \text{ -де шешімі болмайды.}$$

$$4.9. \lambda \neq \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ болғанда, } \varphi(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}x + \frac{\lambda}{1 - \frac{4}{3}\lambda^2} \left[(1+2\lambda)x + 1 + \frac{2}{3}\lambda \right], \text{ ал } \lambda = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

болса, шешімі болмайды.

$$4.10. \lambda \neq \frac{2}{3} \text{ болғанда, } \varphi(x) = 1 - \frac{2\lambda}{1 + \frac{\lambda\pi}{2}} \sin x.$$

$$4.11. \lambda = \frac{2}{\pi} \text{ болғанда, } \varphi(x) = 1 - \sin x + \cos x, \text{ ал } \lambda = -\frac{2}{3} \text{ болса, шешімі болмайды.}$$

$$5.1. \lambda_n = -\pi^2 n^2, \varphi_n(x) = \sin \pi n x, n \in N.$$

$$5.2. \lambda_n = -\frac{\pi^2}{4} (2k+1)^2, \varphi_n(x) = \sin \pi \frac{2n+1}{2} x, n = 0, 1, 2, \dots$$

$$5.3. \lambda_n = -\omega_n^2, \text{ мұндағы, } \omega_n \text{ дегеніміз - } \omega = \operatorname{ctg} \omega \text{ теңдеудің түбірлері, } \varphi_n(x) = \cos \omega_n(x-1), n \in N.$$

$$5.4. \lambda_n = -1 + \left(\frac{2n+1}{2} \right)^2, \varphi_n(x) = \sin \frac{2n+1}{2} x, n = 0, 1, 2, \dots$$

$$5.5. \lambda_n = 1 + \omega_n^2, \text{ мұндағы, } \omega_n \text{ дегеніміз - } \omega = \operatorname{ctg} 2\omega \text{ теңдеудің түбірлері, } \varphi_n(x) = \cos \omega_n x, n \in N.$$

$$5.6. \lambda \neq \lambda_n = -n^2 \pi^2, n \in N \text{ болғанда, } \varphi(x) = 1 + \lambda \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{2k+1} - \lambda} \cdot \frac{4 \sin \pi(2k+1)x}{\pi(2k+1)}; \text{ ал}$$

$$\lambda = \lambda_{2m}, m \in N \text{ болғанда } \varphi(x) = 1 + \lambda_{2m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{2k+1} - \lambda_{2m}} \cdot \frac{4 \sin \pi(2k+1)x}{\pi(2k+1)} + C \sin 2\pi m x; \text{ ал}$$

$$\lambda = \lambda_{2m+1}, m = 0, 1, 2, \dots \text{ жағдайда шешімі болмайды.}$$

$$5.7. \quad \lambda = \lambda_n = -\pi^2 \left(\frac{2n+1}{2} \right)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \text{болғанда,} \quad \varphi(x) = \sin \pi x \cos \frac{\pi}{2} x -$$

$$- \lambda \left(\frac{1}{\lambda + \frac{\pi^2}{4}} \cdot \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} x + \frac{1}{\lambda + \frac{9\pi^2}{4}} \cdot \frac{1}{2} \sin \frac{3\pi}{2} x \right); \quad \text{ал} \quad \lambda = \lambda_0 = -\frac{\pi^2}{4} \quad \text{пен} \quad \lambda = \lambda_1 = -\frac{9\pi^2}{4} \quad \text{-шешімі}$$

$$\text{болмайды, ал} \quad \lambda = \lambda_n, \quad n = 2 \quad \text{жағдайда шешімі} \quad \varphi(x) = \sin \pi x \cos \frac{\pi x}{2} - \lambda_n \left(\frac{1}{\lambda + \frac{\pi^2}{4}} \cdot \frac{1}{2} \sin \frac{\pi x}{2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\lambda + \frac{9\pi^2}{4}} \cdot \frac{1}{2} \sin \frac{3\pi x}{2} \right) + C \sin \frac{\pi(2n+1)}{2} x \quad \text{болады.}$$

$$5.8. \quad \lambda \neq \lambda_n = 1 - \left(\frac{2n+1}{2} \right)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \text{болғанда,}$$

$$\varphi(x) = x - \pi + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2} \left(\frac{2n+1}{2} \right)^2}{\lambda - \lambda_n} \cdot \cos \frac{2n+1}{2} x; \quad \text{ал} \quad \lambda = \lambda_n \quad \text{жағдайда шешімі болмайды.}$$

$$5.9. \quad \lambda = \lambda_n = 1 - 4\pi^2 n^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \text{болса,} \quad \varphi(x) = (1 - \lambda)^{-1}, \quad \text{ал} \quad \lambda = \lambda_0 = 1 \quad \text{жағдайда}$$

$$\text{шешімі болмайды, ал} \quad \lambda = \lambda_n, \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{болғанда,} \quad \varphi_n(x) = \frac{1}{1 - \lambda_n} + C_1 \cos nx + C_2 \sin nx.$$

$$5.10. \quad \lambda = \frac{1}{4}, \quad \varphi(x) = x^2 - 1.$$

$$5.11. \quad \lambda_0 = 1, \varphi_0 = 1; \lambda_n = 1 - 4n^2, \\ \varphi_n(x) = C_1 \cos nx + C_2 \sin nx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$6.1. \quad R(x, s; \lambda) = \frac{2x - s + \left(x + s - 2xs - \frac{3}{2} \right) \lambda}{1 - \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda^2}{6}}.$$

$$6.2. \quad R(x, s; \lambda) = \frac{1}{1 + \frac{\lambda^2}{240}} \left[x^2 s - xs^2 + xs \left(\frac{x+s}{4} - \frac{xs}{3} - \frac{1}{5} \right) \lambda \right].$$

$$6.3. \quad R(x, s; \lambda) = \sin x \cos s. \quad 6.4. \quad R(x, s; \lambda) = \frac{xs}{1 - \frac{\lambda}{3}}.$$

$$6.5. \quad R(x, s; \lambda) = \frac{\sin x - \sin s - \pi(1 + 2 \sin x \sin s) \lambda}{1 + 2\pi^2 \lambda^2}.$$

$$6.6. \quad R(x, s; \lambda) = \cos x + \cos s.$$

$$6.7. \quad R(x, s; \lambda) = \frac{(\sin 2x - \sin 2s) - \lambda \pi \sin 2x \sin 2s}{1 - \lambda \pi^2}.$$

$$6.8. \quad R(x, s; \lambda) = \frac{\sin x + \sin s + \pi \lambda (1 - 2 \sin x \sin s)}{1 - \lambda^2 4 \pi^2}.$$

$$6.9. \quad R(x, s; \lambda) = \frac{1 + 3xs + \lambda \left(3 \frac{x+s}{2} - 3xs - 1 \right)}{1 - 2\lambda + \frac{1}{4} \lambda^2}.$$

$$6.10. \quad R(x, s; \lambda) = \frac{x(4s - x) - \lambda \left[x + 2x^2s - \frac{4}{3}(x^2 + xs) \right]}{1 - \lambda + \frac{1}{18} \lambda^2}.$$

$$6.11. \quad R(x, s; \lambda) = \frac{e^{2(x+s)}}{1 - \frac{\lambda}{4}(e^4 - 1)}. \quad 6.12. \quad R(x, s; \lambda) = \frac{\cos(x+s) - \lambda \pi \cos(x-s)}{1 - 2\pi \lambda^2}.$$

10-тарау

3.1. $\varphi_3(x) = 6x^2 + 1$ - дэл шешімі. 3.2. $\varphi_3(x) = 1$ - дэл шешімі.

3.3. $\varphi_3(x) = 1$ - дэл шешімі.

4.1. $\lambda_1 = 5 \frac{1}{7}$ /дэл мэнi $\lambda_1 = 5$ /. 4.2. $\lambda_1 = 2,486$; $\lambda_2 = 32,181$.

4.3. $\lambda_1 = 4,59$.

ӘДЕБИЕТТЕР

1. Орынбасаров М., Сахаев Ш., Интегралдық теңдеулер. – Алматы: Білім, 1994. 140 б.
2. Смирнов В.И. Курс высшей математики, т. ч. 1957, Москва
3. Михлин С.Г. Интегральные уравнения. М-Л. 1949, 379 с., Москва-Ленинград
4. Орынбасаров М., Сахаев Ш., Сызықтық интегралдық теңдеулердің есептер жинағы. Алматы: Қазақ университеті, 2000, 91 б.
5. Краснов М.Л., Кисилев А.Н., Макаренко Г.И., Интегральные уравнения, 2-ое изд.-М., 1976.
6. Михлин С.Г., Лекции по линейным интегральным уравнениям, физмат-гиз, 1959. Москва
7. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функции и функционального анализа. М.: Наука, 1981. 542 с.
8. Сахаев Ш. Интегралдық түрлендірулер және олардың қолданулары. Алматы: Қазақ университеті, 2009. 115 б.

МАЗМҰНЫ

Алғы сөз.....	3
1. Негізгі ұғымдар мен интегралдық теңдеулерге келтірілетін есептер	
1.1. Интегралдық теңдеулерді кластарға бөлу	4
1.2. Интегралдық теңдеулерге келтірілетін есептер.....	9
1.3. Дифференциалдық теңдеулер үшін Коши есебі мен шекаралық есептерді шешуді интегралдық теңдеуге келтіру	12
2. Функционалдық анализден көмекші мағлұматтар	
2.1. Метрикалық кеңістіктер және олардың кейбір қасиеттері.	15
2.2. Сызықтық нормаланған кеңістік.....	18
2.3. Сызықтық үзіліссіз операторлар	20
2.4. Гильберттік кеңістік.....	23
3. Қысып бейнелеу әдісі және оны қолдану	
3.1. Қысып бейнелеу әдісі	29
3.2. Қысып бейнелеу әдісін Фредгольмнің интегралдық теңдеуіне қолдану	30
3.3. Қысып бейнелеу әдісін Вольтерра теңдеуіне және сызықтық емес интегралдық теңдеулерге қолдану.	43
3.4. Ерекшелігі әлсіз ядролы интегралдық теңдеулер.....	50
4. Фредгольм теориясы	
4.1. Ерекшеленген ядролы Фредгольмнің 2-текті интегралдық теңдеуі.....	57
4.2. Фредгольмнің жалпы интегралдық теңдеуін ерекшеленген ядролы теңдеуге келтіру.....	61
4.3. Фредгольмнің анықтауыштар әдісі	64
4.4. Фредгольм теоремалары	72
5. Симметриялық интегралдық теңдеулер	
5.1. Симметриялық ядролар және олардың кейбір қасиеттері	79
5.2. Симметриялы ядролы интегралдық теңдеулердің негізгі қасиеттері	80
5.3. Ядроны қатарға жіктеу	85
5.4. Гильберт – Шмидт теоремасы.....	90
5.5. Симметриялық интегралдық теңдеуге келтірілетін интегралдық теңдеулер	97
6. Бірінші текті интегралдық теңдеулер	
6.1. Вольтерраның бірінші текті теңдеуі.....	105
6.2. Абель теңдеуі.....	106
6.3. Фредгольмнің бірінші текті теңдеуі	109

6.4. Ядросы симметриялық емес бірінші текті интегралдық теңдеулер	114
6.5. Фредгольмнің бірінші текті қисынсыз интегралдық теңдеуі	115
7. Интегралдық түрлендірулер мен теңдеулер	
7.1. Фурье түрлендіруі және оның интегралдық теңдеулерге қолдану	120
7.2. Лаплас түрлендіруі және оны интегралдық теңдеулерге қолдану	130
7.3. Меллин түрлендіруі және оны қолдану	139
8. Вольтерраның интегралдық теңдеулері	
8.1. Интегралдық теңдеулерді топтастыру	144
8.2. Интегралдық және дифференциалдық теңдеулер арасындағы байланыс.	148
8.3. Вольтерраның 2-текті интегралдық теңдеулерін тізбектей жуықтап шешу әдісі.	153
8.4. Интегралдық теңдеудің резольвентасы.	155
8.5. Үйірткі типіндегі Вольтерраның 2-текті интегралдық теңдеуі және оны Лапластың интегралдық түрлендіру әдісімен шешу	158
8.6. Вольтерраның 1-текті интегралдық теңдеулері және оларды шешу тәсілдері	160
8.7. Шекарасы $(X, +\infty)$ болған Вольтерраның интегралдық теңдеулері	165
9. Фредгольмнің интегралдық теңдеулері	
9.1. Фредгольмнің 2-текті интегралдық теңдеулерін біртіндеп жуықтап шешу	167
9.2. Өзегі қарапайым Фредгольмнің 2-текті интегралдық теңдеулерін шешу	171
9.3. Интегралдық теңдеулердің меншікті сандары мен меншікті функциялары	174
9.4. Фредгольм теоремалары	176
9.5. Симметриялық өзекті Фредгольмнің 2-текті интегралдық теңдеулері	179
9.6. Фредгольмнің анықтауыштар әдісі	185
10. Интегралдық теңдеулерді жуықтау әдісімен шешу	
10.1. Шектелген қосылғыштар әдісі	189
10.2. Моменттер әдісі	191
10.3. Бубнов-Галеркин әдісі	194
10.4. Ритца әдісі	195
Жауаптары	198
Әдебиеттер	204

Оқу басылымы

Орынбасаров Мамажан
Сахаев Шәріпхан

ИНТЕГРАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР КУРСЫ

Оқу құралы

Редакторы *Самат Қалуов*
Компьютерде беттеген *Тұраш Сапарова*
Мұқабасын көркемдеген *Ринат Скаков*

ИБ № 7138

Басуға 10.03.2014 жылы қол қойылды. Пішімі 60х84 1/16. Көлемі 17,25 б.т.
Офсетті қағаз. Сандық басылыс. Тапсырыс № 273. Таралымы 150 дана. Бағасы келісімді.
Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университетінің «Қазақ университеті» баспасы.
050040, Алматы қаласы, әл-Фараби даңғылы, 71.

«Қазақ университеті» баспаханасында басылды

